

Introduzione alla Generazione di Immagini Fotorealistiche

*Corso di Dottorato in Matematica e Informatica
Università degli Studi della Basilicata*

Dott. Ugo Erra

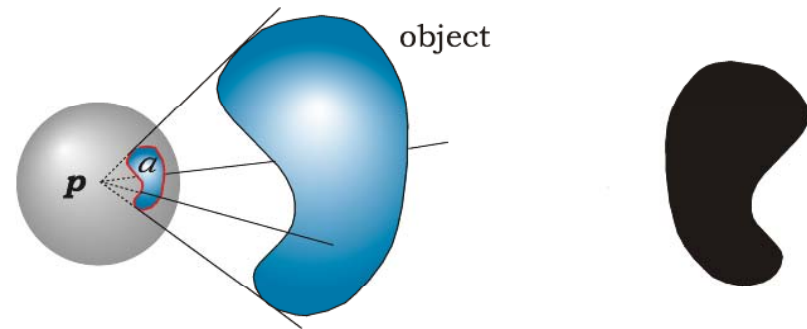
7° Lezione – Radiometria

Sommario

- Angolo solido
 - Concetti di radiometria
 - Radianza
 - BRDF
 - Un modello di BRDF
-

Angolo solido

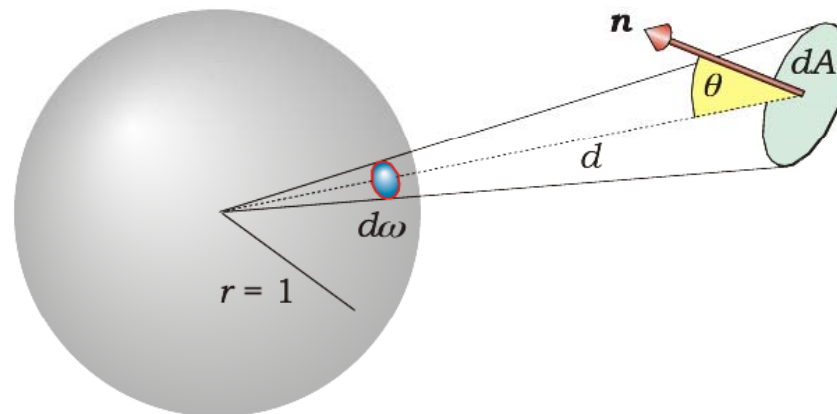
- Un angolo solido è l'estensione 2D del concetto di angolo
- Consideriamo una sfera centrata su di un punto p
- Dal punto p tracciamo una retta tangente al bordo di un oggetto visto da p
- Ripetendo l'operazione per tutto il bordo dell'oggetto determiniamo sulla sfera un'area a
- Il rapporto tra l'area a e la superficie totale della sfera è definito *angolo solido*
- L'angolo solido si denota solitamente con ω e si misura in *steradiani*
- Se la sfera ha raggio 1, la sua superficie è 4π e l'angolo solido è $\omega = a / 4\pi$



Angolo solido differenziale

- Sia \mathbf{n} la normale di una superficie differenziale dA
- Sia θ l'angolo tra la normale \mathbf{n} e la linea che congiunge il centro della sfera con dA
- Se d è la distanza tra dA ed il centro della sfera allora l'angolo solido differenziale $d\omega$ è dato da

$$d\omega = \frac{\cos \theta dA}{d^2}$$



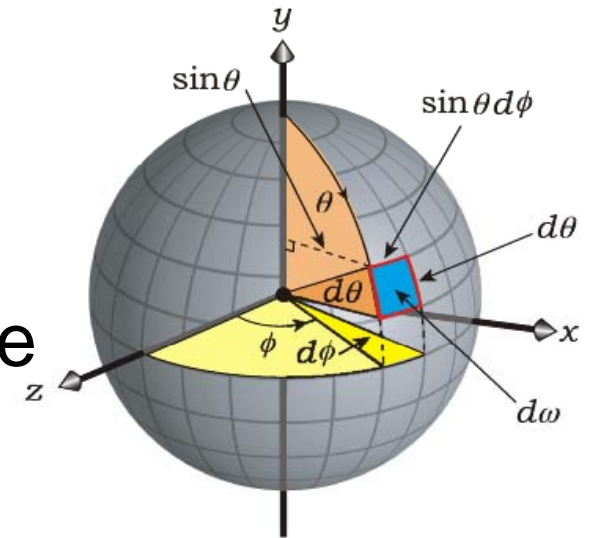
Angolo solido e coordinate sferiche

- Possiamo definire il differenziale di un angolo solido utilizzando le coordinate sferiche

$$d\omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

- In questo modo è possibile calcolare l'area della superficie come

$$area = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi$$



Fiat lux!

- Come misurare la luce?
 - Come descrivere la distribuzione spaziale dell'energia associata alla luce?
 - Come caratterizzare la riflessione della luce su una superficie?
 - Quale è la condizione di equilibrio per un flusso di una sorgente luminosa in un ambiente?
-

Il modello della luce

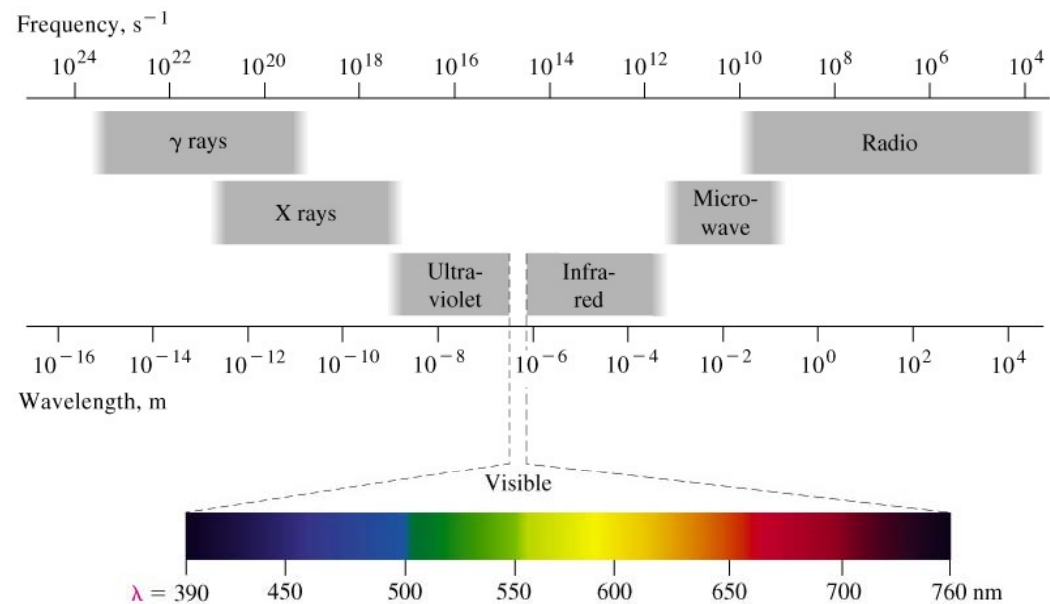
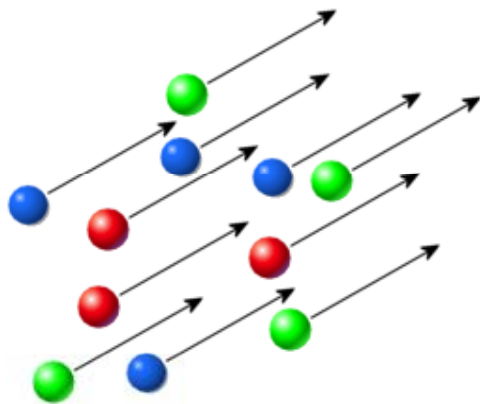
- La *natura complementare* della luce implica che diversi fenomeni vengono spiegati con modelli diversi:
 - **Ottica geometrica:** La luce è un raggio simile ad una retta che interagisce con la materia seguendo semplici regole di geometria
 - **Onde elettromagnetiche:** La luce è un'onda che interagendo con la materia produce effetti come la diffrazione e l'interferenza
 - **Elettrodinamica quantistica:** La luce è un flusso di fotoni il cui comportamento è interpretabile solo in termini statistici
-

Illuminazione globale

- Negli algoritmi di **illuminazione globale** consideriamo:
 - La luce ricevuta direttamente da una sorgente di luce (*illuminazione diretta*)
 - La luce riflessa, diffusa, o rifratta da altre superfici (*illuminazione indiretta*)
 - Per misurare la luce consideriamo:
 - L'ottica geometrica per descrivere il comportamento di un raggio di luce
 - Il concetto di quanto di fotone per quantificare l'energia associata ad un raggio di luce
-

Il modello della luce

- Quindi il nostro modello è un fotone orientato in moto la cui frequenza λ ne determina il colore



Radiometria

- La *radiometria* si occupa di misurare la potenza irradiata dalle sorgenti luminose
 - Le grandezze radiometriche sono quelle relative alla radiazione elettromagnetica
 - La *fotometria* si occupa dell'effetto che la radiazione luminosa ha sull'occhio umano medio
 - Richiede l'introduzione di grandezze e unità di misura ad hoc
 - Nella radiometria ad ogni fotone associamo:
 - Una posizione nello spazio
 - Una direzione
 - Una lunghezza d'onda λ o frequenza f
 - La lunghezza λ d'onda è inversamente proporzionale alla frequenza f
-

Energia radiante

- **Energia radiante Q (*radiant energy*):** è l'energia trasportata da un qualunque campo di radiazione elettromagnetica da ogni fotone

$$Q = \frac{hc}{\lambda}$$

- Dove:
 - h è la costante di Planck
 - c è la velocità della luce
 - λ è la lunghezza d'onda del fotone
 - L'unità di misura è il joule (J)
-

Energia radiante

- Se abbiamo n fotoni con lunghezza d'onda λ , allora:

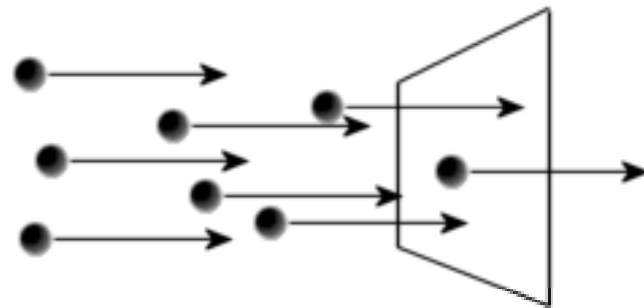
$$Q_n = n_\lambda \frac{hc}{\lambda}$$

- Q_n è l'energia radiante totale
-

Flusso radiante

- **Flusso radiante** Φ (*radiant flux*): è l'energia radiante nell'unità di tempo
 - Considerata la grandezza radiometrica fondamentale, sulla base della quale sono definite tutte le grandezze successive
 - L'unità di misura è il watt (W)

$$\Phi = \frac{dQ}{dt}$$



Esempio

- Consideriamo una sorgente di luce di 100 Watt(Joule/sec)
- Supponiamo che la lunghezza d'onda media di ogni fotone sia $\lambda=500\text{nm}$, allora:

$$n = \frac{Q_n \lambda}{hc} = \frac{100 \times 500 \times 10^{-9}}{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} \approx 2.5 \times 10^{20}$$

Quindi in un secondo una lampadina di 100W spara circa 10^{20} fotoni

Densità di flusso radiante

- **Densità di flusso radiante** (*radiant flux density*): è l'energia radiante per superficie unitaria

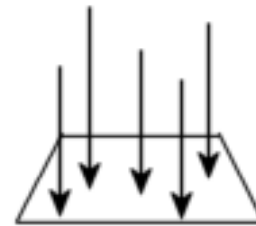
$$d\Phi/dA$$

- L'unità di misura è il watt (W/m²)
 - Distinguiamo due tipi di flussi radianti:
 - Irradianza
 - Radiosità
-

Irradianza

- **Irradianza E (*irradiance*):** è il flusso radiante incidente su una superficie per unità di area
 - L'unità di misura nel è il watt al metro quadrato (W/m^2)

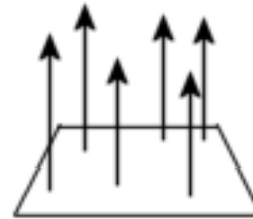
$$E = \frac{d\Phi}{dA}$$



Radiosità

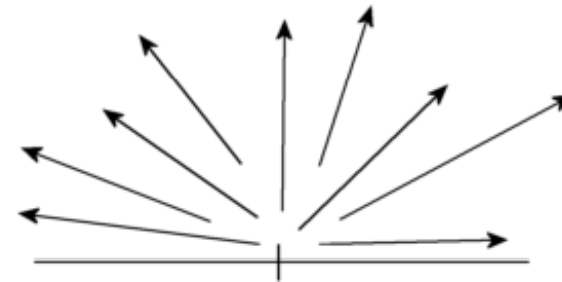
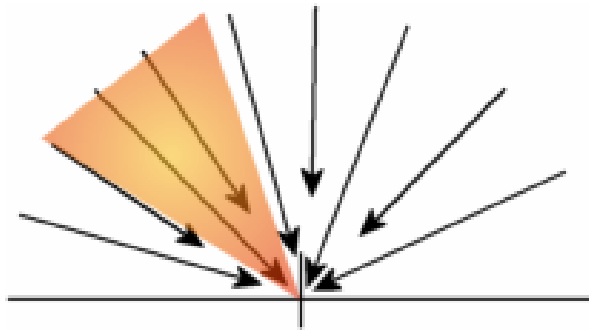
- **Radiosità M (*radiosity*):** è il flusso radiante uscente da una superficie per unità di area
 - L'unità di misura nel è il watt al metro quadrato (W/m^2)

$$B = \frac{d\Phi}{dA}$$



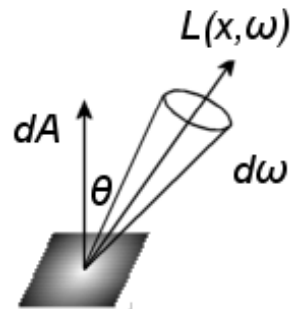
Intensità radiante

- L'irradianza e la radiosità sono in genere riferiti ad un punto nello spazio
- Abbiamo bisogno di una misura che quantifichi la grandezza del raggio visibile da un punto
- **Intensità radiante I** (*radiant intensity*): è il flusso radiante emesso da una sorgente puntiforme in una certa direzione per unità di angolo solido
 - L'unità di misura è il watt per steradiano (W/sr)



Radianza

- **Radianza L (*radiance*):** è il flusso radiante per angolo solido per la proiezione unitaria dell'area
 - L'unità di misura è il watt allo steradiante per metro quadrato (W/(sr m²))



$$L = \frac{d^2\Phi}{dA^\perp d\omega}$$

- La radianza lega la quantità di energia che fuoriesce da una superficie rispetto alla direzione di un ipotetico osservatore o di un'altra superficie
 - Il nostro occhio percepisce proprio la radianza
-

Alcune osservazioni sulla radianza

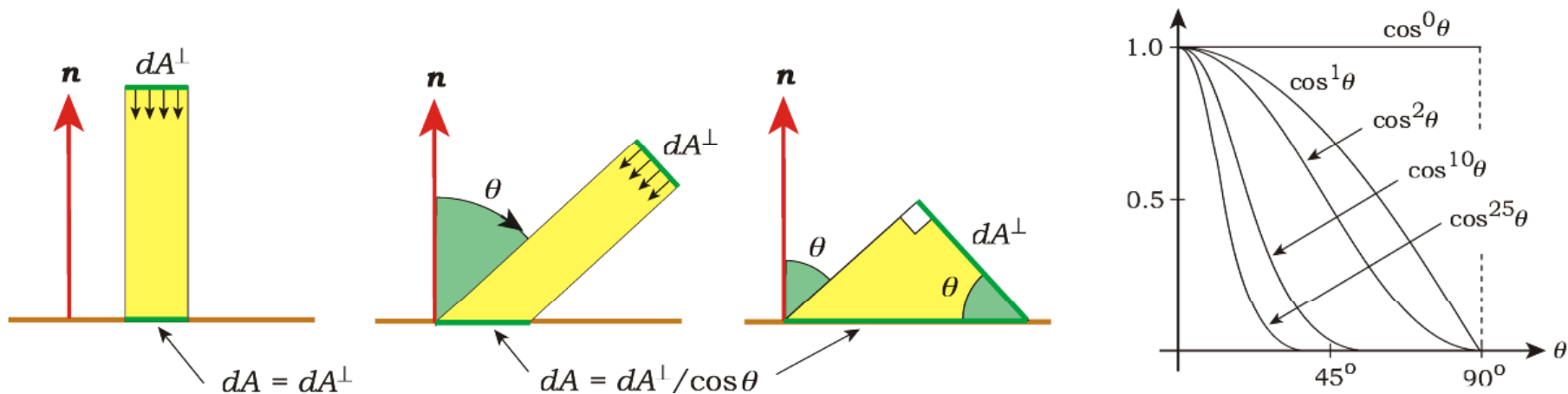
- La radianza di un raggio lungo il suo percorso è costante
 - La radianza può essere definita in un qualunque punto nello spazio e quindi può essere utilizzata nella posizione della camera o come punto di un pixel
-

Proprietà dell'irradianza

- Se il punto p giace su di una superficie possiamo rappresentare l'area della superficie in modo alternativo
- Dalla *legge di Lambert* l'irradianza E è proporzionale al coseno dell'angolo incidente, ovvero

$$dA^\perp = \cos\theta \, dA$$

- Intuitivamente l'irradianza tende a zero quanto più la luce è radente alla superficie



Angolo solido proiettato

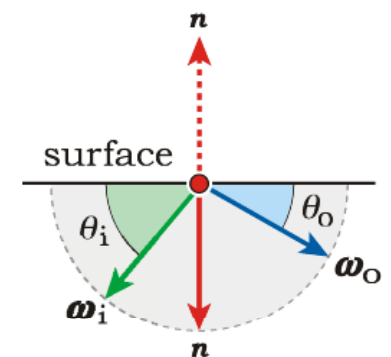
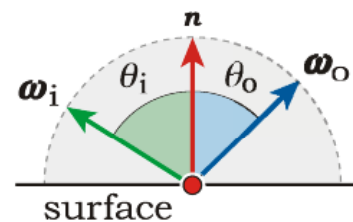
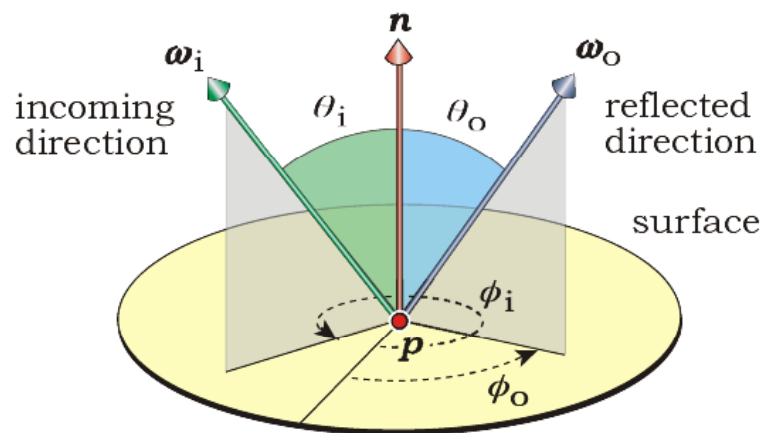
- La radianza incidente su di un punto di una superficie è quindi

$$L = \frac{d^2\Phi}{dA \cos\theta d\omega}$$

- Il termine $\cos\theta d\omega$ è chiamato *angolo solido proiettato* poiché rappresenta la proiezione dell'angolo solido $d\omega$ sul piano (x,y)
-

Notazione e direzioni

- Per indicare in che modo la luce è riflessa su di un punto p di un piano useremo la seguente notazione:
 - ω_i per indicare la luce incidente o (θ_i, ϕ_i)
 - ω_o per indicare la luce riflessa o (θ_o, ϕ_o)



Radianza e Irradianza

- La relazione che intercorre tra la radianza incidente e l'irradianza è la seguente

$$dE_i(p, \omega_i) = L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

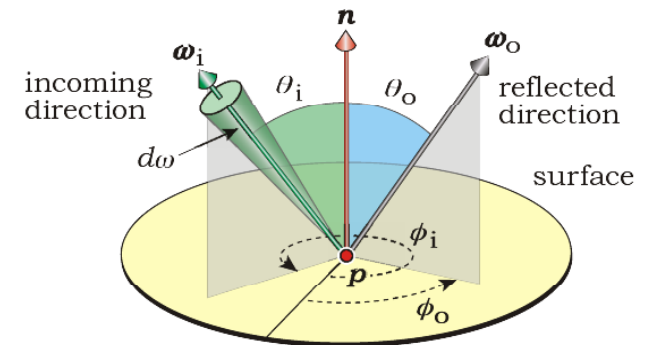
dove $L(p, \omega_i)$ è la radianza incidente nel punto p e $dE_i(p, \omega_i)$ è l'irrandianza incidente

- Se consideriamo l'irradianza da un angolo solido *finito* Ω_i allora

$$E_i(p) = \int_{\Omega_i} L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

BRDF

- Un *materiale* rappresenta un insieme di proprietà necessarie a descrivere in che modo la luce interagisce con una superficie
- La funzione che descrive in che modo la luce interagisce con il materiale è chiamata *bidirectional reflectance distribution function* (BRDF)
- La BRDF descrive la quantità di radianza riflessa dal punto p nella direzione ω_o per una quantità incidente di irradianza $dE_i(\mathbf{p}, \omega_i)$ nella direzione ω_i



BRDF

- Poiché la risposta di un materiale è sempre lineare, la radianza e l'irradianza sono proporzionali:

$$dL(\mathbf{p}, \omega_o) \propto dE_i(\mathbf{p}, \omega_i)$$

- La BRDF $f_r(\mathbf{p}, \omega_i, \omega_o)$ è dunque la costante di proporzionalità

$$dL(\mathbf{p}, \omega_o) = f_r(\mathbf{p}, \omega_i, \omega_o) dE_i(\mathbf{p}, \omega_i)$$

- Sostituendo $dE_i(\mathbf{p}, \omega_i)$

$$dL_o(\mathbf{p}, \omega_o) = f_r(\mathbf{p}, \omega_i, \omega_o) L_i(\mathbf{p}, \omega_i) \cos\theta_i d\omega_i$$

BRDF

- La BRDF è dunque:

$$f_r(p, \omega_i, \omega_o) = \frac{dL_o(p, \omega_o)}{L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i}$$

- Alcune osservazioni:
 - La BRDF è funzione solo di p e delle direzioni ω_i e ω_o
 - Il range è compreso tra zero ed infinito
-

Proprietà della BRDF

- **Reciprocità:** scambiando la BRDF non cambia, ovvero:

$$f_r(\mathbf{p}, \omega_i, \omega_o) = f_r(\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i)$$

- **Linearità:** se un materiale per essere modellato necessita di diverse BRDF la radianza riflessa totale è data dalla somma di ogni singola BRDF
 - **Conservazione dell'energia:** L'energia riflessa è uguale o minore all'energia incidente
-

Equazione della riflessione

- La quantità di radianza riflessa nella direzione ω_o è data considerando l'irradianza totale entrante in un angolo solido Ω_i

$$L_o(p, \omega_o) = \int_{\Omega_i} f_r(p, \omega_i, \omega_o) L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

- Considerando l'intera semisfera sopra il punto p , otteniamo la radianza totale riflessa nella direzione ω_o , otteniamo l'*equazione della riflessione*

$$L_o(p, \omega_o) = \int_{2\pi^+} f_r(p, \omega_i, \omega_o) L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

Riflettanza - 1

- La **riflettanza** è definita come la proporzione di luce incidente che una data superficie è in grado di riflettere
 - Rappresentata un rapporto tra l'intensità del flusso radiante trasmesso e l'intensità del flusso radiante incidente
 - E' una grandezza adimensionale
-

Riflettanza - 2

- Il flusso radiante incidente su una superficie differenziale dA attraverso un angolo solido Ω_i

$$d\Phi_i = dA \int_{\Omega_i} L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

- Il flusso radiante riflesso sulla stessa superficie dA attraverso un angolo solido Ω_o

$$d\Phi_o = dA \int_{\Omega_o} L_o(p, \omega_o) \cos \theta_o d\omega_o$$

- Utilizzando l'equazione della riflessione otteniamo:

$$d\Phi_o = dA \int_{\Omega_o} \int_{\Omega_i} f_r(p, \omega_i, \omega_o) L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i \cos \theta_o d\omega_i d\omega_o$$

Riflettanza - 3

- La riflettanza $\rho(p, \Omega_i, \Omega_o)$ è dunque

$$\rho(p, \Omega_i, \Omega_o) = d\Phi_o / d\Phi_i$$

- Da cui

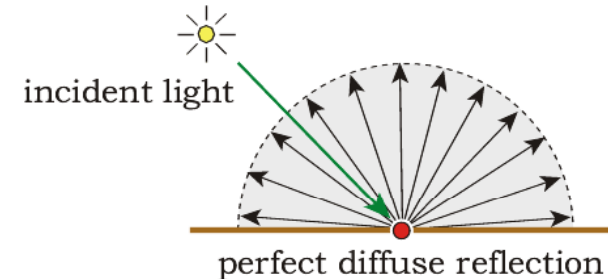
$$\rho(p, \Omega_i, \Omega_o) = \frac{\int_{\Omega_o} \int_{\Omega_i} f_r(p, \omega_i, \omega_o) L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i \cos \theta_o d\omega_i d\omega_o}{\int_{\Omega_i} L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i}$$

- La riflettanza non fa assunzioni sugli angoli solidi, la BRDF ne sulla superficie
- Poiché nessun materiale riflette più luce di quante ne riceve abbiamo che

$$\rho(p, 2\pi^+, 2\pi^+) < 1$$

Un esempio di BRDF - 1

- Consideriamo una superficie riflessiva ideale in cui la radianza incidente è riflessa in tutte le direzioni con la stessa intensità
 - In natura non esistono superfici del genere ma permette di modellare materiali opachi come ad esempio la carta
- Poiché la radianza in uscita è indipendente da ω_o



$$L_o(\mathbf{p}, \omega_o) = L_{r,d}(\mathbf{p})$$

- Anche la BRDF sarà indipendente da ω_o e ω_i quindi sarà indicata da $f_{r,d}(\mathbf{p})$, da cui

$$L_{r,d}(\mathbf{p}) = f_{r,d}(\mathbf{p}) \int_{\Omega_i} L_i(\mathbf{p}, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i = f_{r,d}(\mathbf{p}) E_i(\mathbf{p})$$

Un esempio di BRDF - 2

- Vogliamo esprimere $f_{r,d}$ in termini di riflettanza perfettamente diffusa come frazione del flusso riflesso e del flusso incidente

- Il flusso uscente è uguale a

$$d\Phi_o = dAL_{r,d}(p) \int_{2\pi^+} \cos \theta_o d\omega_o = dAL_{r,d}(p)\pi$$

- Il flusso incidente è uguale a

$$d\Phi_i = dA \int_{2\pi^+} L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i = dAE_i(p)$$

- La riflettanza è pari a

$$\rho_d(\mathbf{p}) = d\Phi_o / d\Phi_i = L_{r,d}(\mathbf{p})\pi / E_i(\mathbf{p}) = f_{r,d}(\mathbf{p}) \pi$$

ovvero

$$f_{r,d}(\mathbf{p}) = \rho_d(\mathbf{p}) / \pi$$
