Introduzione alla Generazione di Immagini Fotorealistiche

Corso di Dottorato in Matematica e Informatica
Università degli Studi della Basilicata

Dott. Ugo Erra

8° Lezione – Equazione di Rendering

Sommario

- Equazione di rendering
- Metodo Monte Carlo
  - Riduzione delle varianza

Equazione di rendering

- Assumiamo che
  - $L_e(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_\mathrm{o})$ è la radianza emessa spontaneamente da $\boldsymbol{p}$ in direzione $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{o}$
  - $L_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_\mathrm{o})$ è la radianza riflessa dal punto $\boldsymbol{p}$ nella direzione $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{o}$
- La radianza uscente $L_e(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_\mathrm{o})$ dal punto $\boldsymbol{p}$ in direzione $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{o}$ è

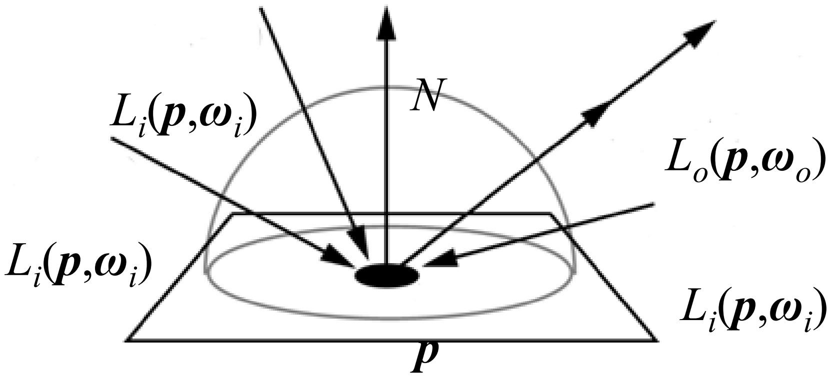
$$L_o(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_\mathrm{o}) = L_e(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_\mathrm{o}) + L_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_\mathrm{o})$$

  ovvero

$$L_o(p,\omega_o) = L_e(p,\omega_o) + \int_{2\pi^+} f_r(p,\omega_i,\omega_o) L_i(p,\omega_i) \cos\theta_i \, d\omega_i$$

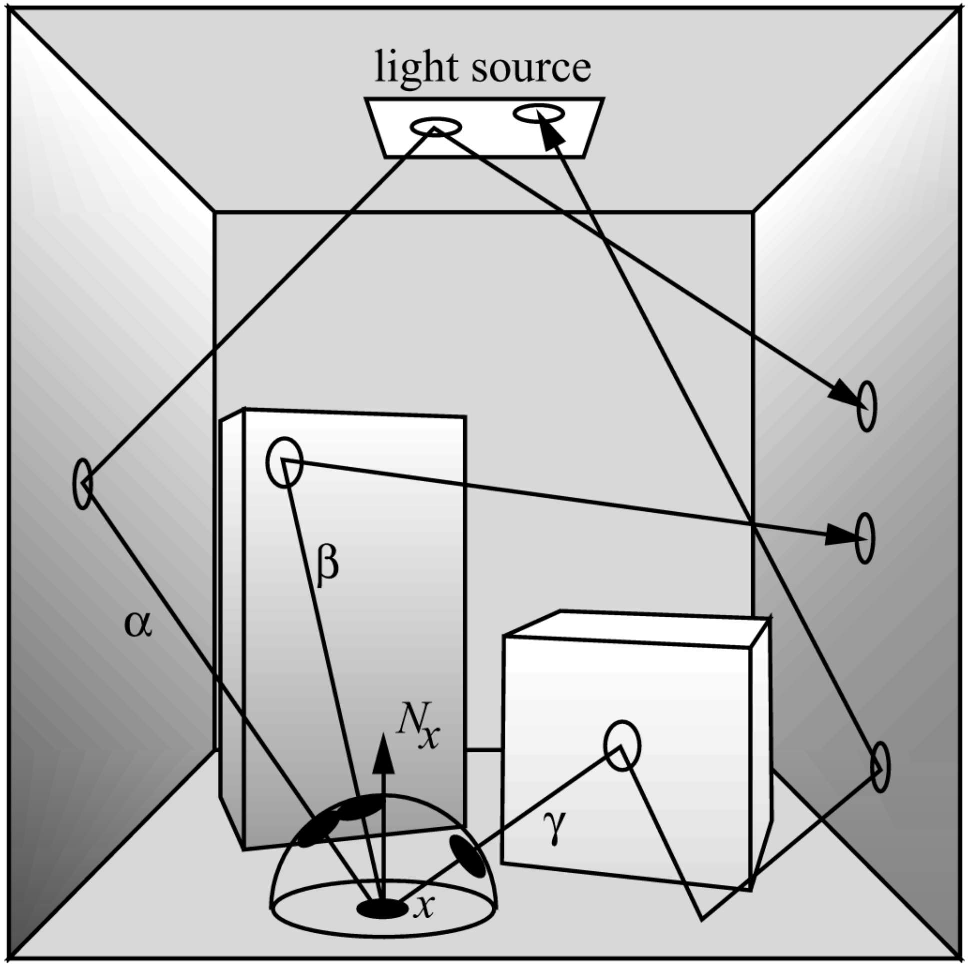
Equazione di rendering

$$L_o(p,\omega_o) = L_e(p,\omega_o) + \int_{2\pi^+} f_r(p,\omega_i,\omega_o) L_i(p,\omega_i)\cos\theta_i d\omega_i$$

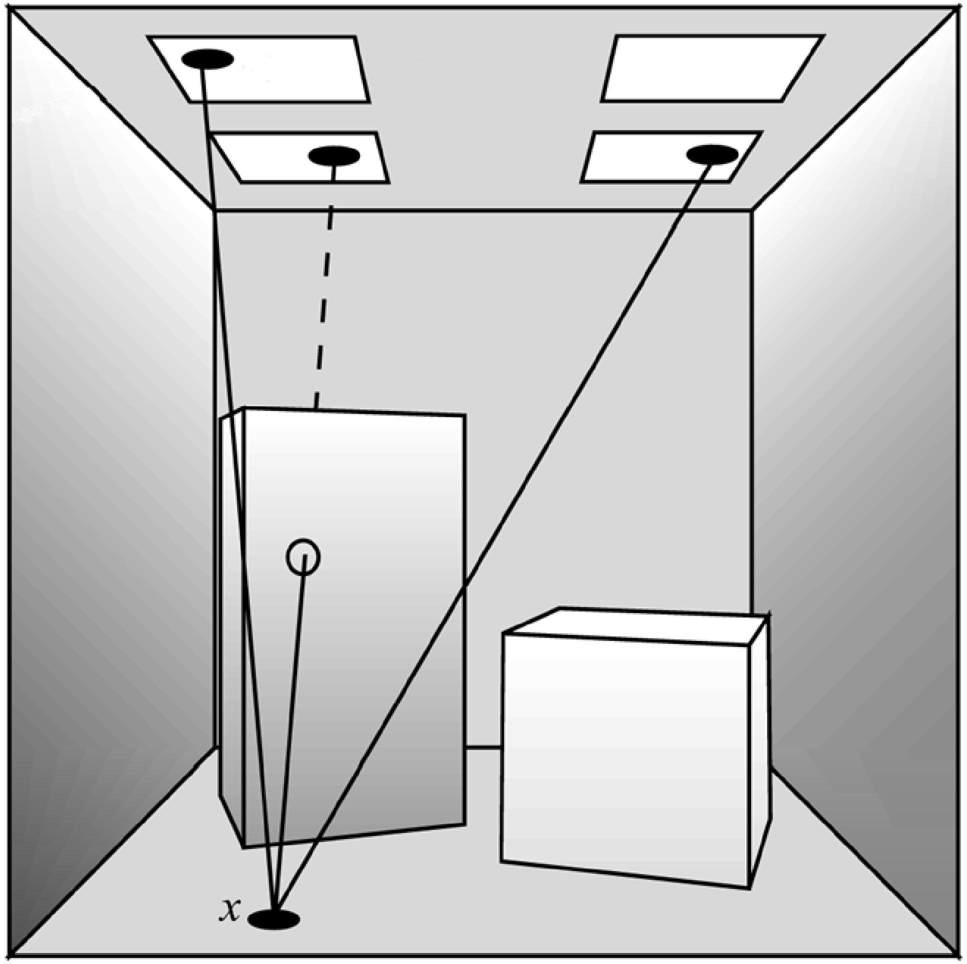


- L'equazione di rendering considera tutti i possibili raggi incidenti nella direzione $\boldsymbol{\omega}_i$ su $\boldsymbol{p}$ per determinare la radianza uscente $L_o(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)$
  - Definisce la condizione di equilibrio della radiazione energetica all'interno di una scena
- <u>Per determinare la radianza uscente dobbiamo determinare tutte le radianza entrante</u>

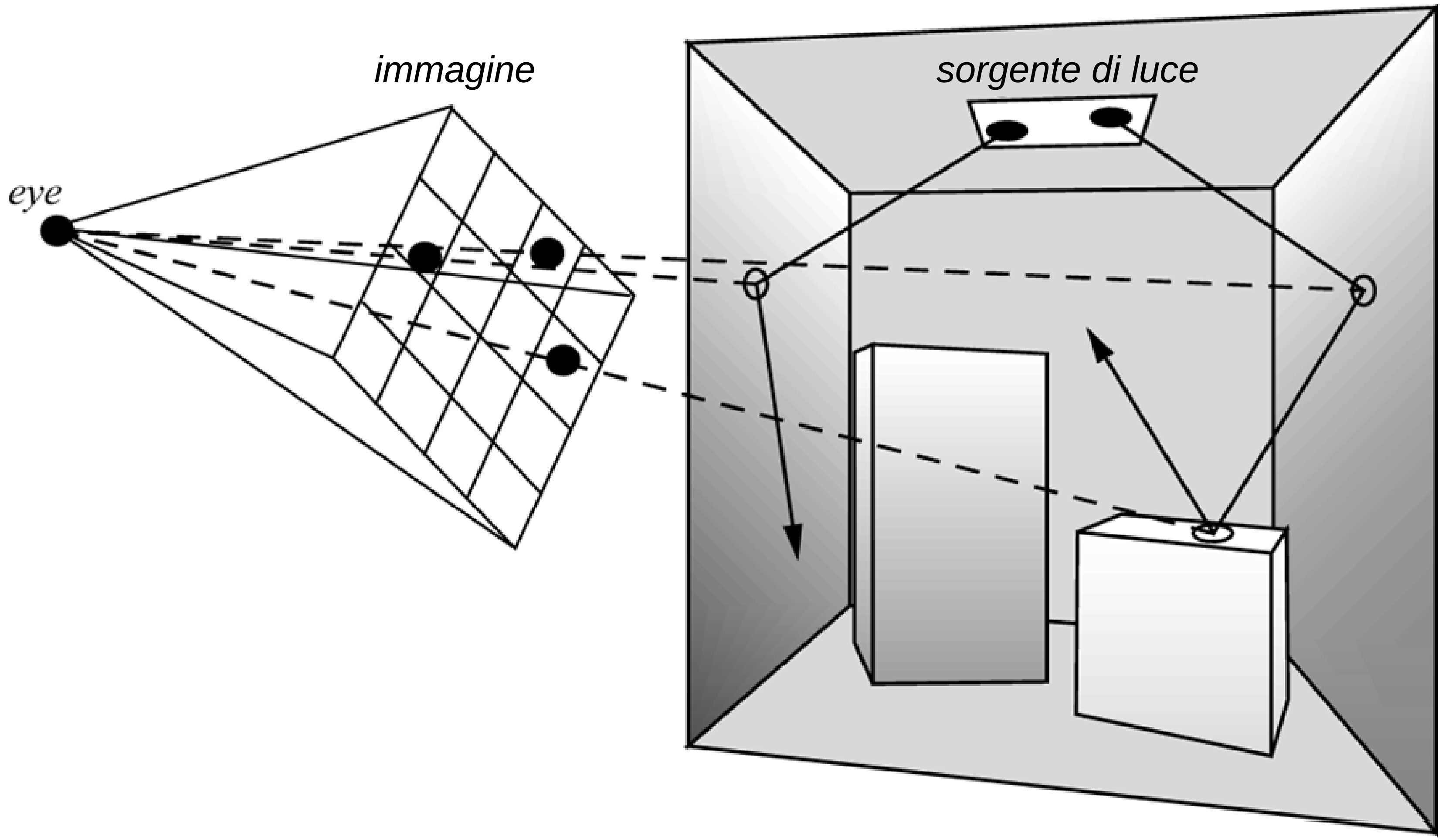
Quanti percorsi ci sono?



Occlusioni



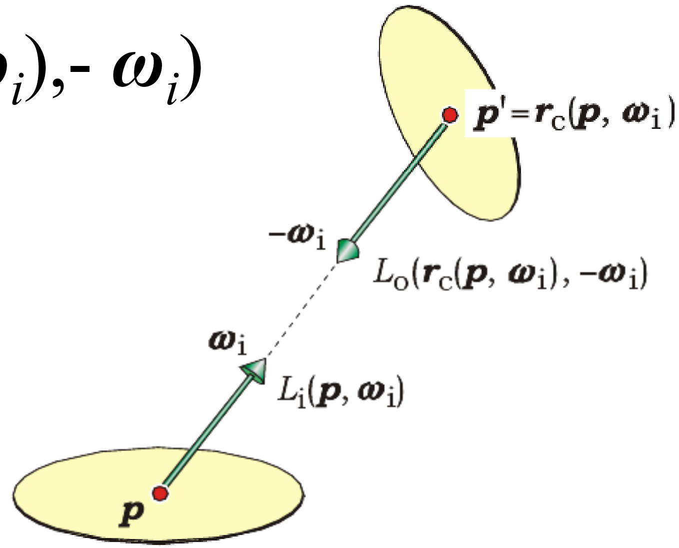
Uso dell’equazione di rendering



Operatore di ray casting

- Definiamo l'operatore di *ray casting* $r_c(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i)$ nel come colpito più vicino dal raggio $\boldsymbol{\omega}_i$ generato da $\boldsymbol{p}$
- Poiché la radianza è costante lungo un raggio allora

$$L_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i) = L_o(r_c(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i),- \boldsymbol{\omega}_i)$$



Equazione di rendering

- Sostituendo otteniamo la forma finale:

$$L_o(p,\omega_o) = L_e(p,\omega_o) + \int_{2\pi^+} f_r(p,\omega_i,\omega_o) L_o(r_c(p,\omega_i),-\omega_i)\cos\theta_i d\omega_i$$

- L’equazione di rendering è un integrale di Fredholm del secondo tipo
  - Il kernel è la funzione BRDF
- Il termine $L_e(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)$ è necessario per fornire una sorgente luminosa all’interno dell’ambiente
- Le informazioni per la sua risoluzione sono contenute all’interno della descrizione della scena
- Il ray tracing ed il radiosity sono due tecniche che approssimano una soluzione dell’equazione di rendering

Area Form

- Una forma alternativa dell’equazione di rendering utilizza l’integrazione sulle superfici piuttosto che sulle semisfere
  - I punti sono considerati a partire dai punti generati sulle superfici
- La radianza incidente sul punto ***p*** è uguale alla radianza in uscita da un punto della superficie ***p’*** se ***p*** e ***p***’ sono visibili
- Definiamo la funzione di visibilità come:

$$\forall (p, p') \in A : V(p, p') = \begin{cases} 1 & \text{se } p \text{ e } p' \text{ sono visibili} \\ 0 & \text{se } p \text{ e } p' \text{ non sono visibili} \end{cases}$$

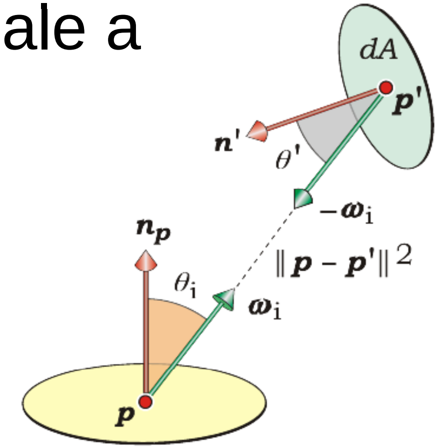
Equazione di rendering per superfici

- Dati due punti ***p*** e ***p***' l'angolo differenziale è uguale a

$$d\omega_i = \cos\theta' dA \,/\, \|\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}\|^2$$

dove

$$\cos\theta' = \boldsymbol{n}' \cdot (- \boldsymbol{\omega}_i)$$



- L'equazione di rendering per superfici è

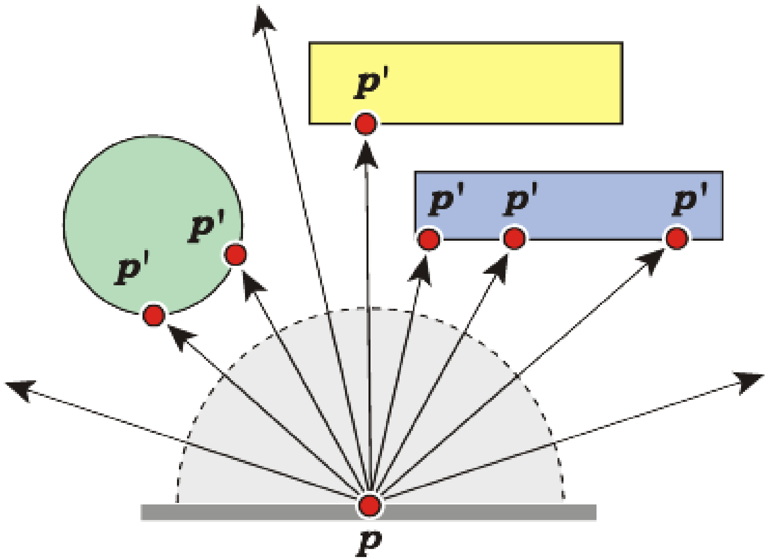
$$L_o(p,\omega_o) = L_e(p,\omega_o) + \int_A f_r(p,\omega_i,\omega_o) L_o(p',-\omega_i) V(p,p') G(p,p') dA$$

dove

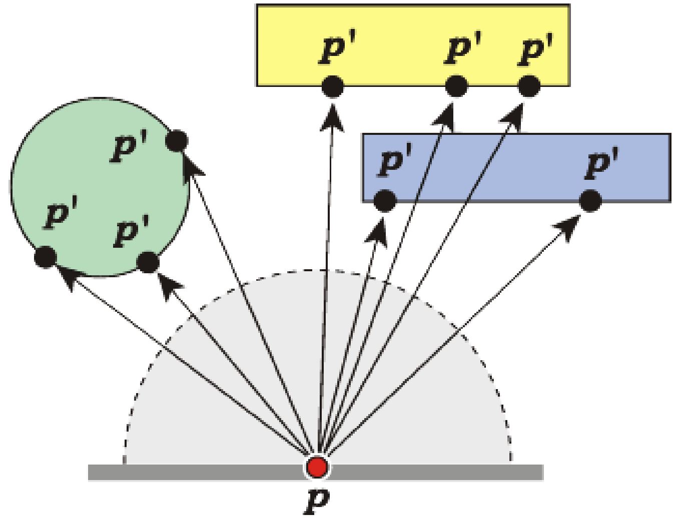
$$G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}') = \cos\theta_i' \cos\theta' \,/\, \|\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}\|^2$$

e' definito *geometry term*

Differenze tra le equazioni di rendering



La direzione dei raggi è indipendente dalla disposizione degli oggetti nella scena



La direzione dei raggi è determinata campionando i punti sulla superficie degli oggetti

Monte Carlo

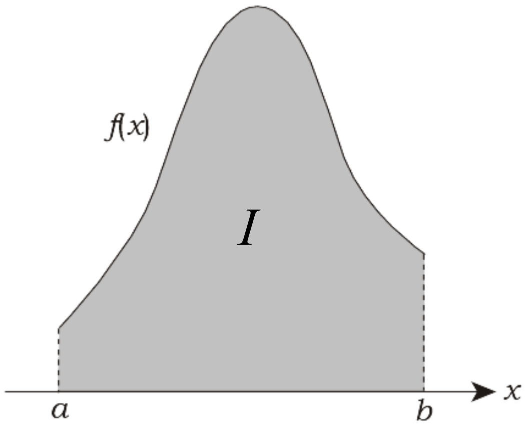
- L'**algoritmo Monte Carlo** è un metodo numerico che viene utilizzato per trovare le soluzioni di problemi matematici, che possono avere molte variabili e che non possono essere risolti facilmente, ad esempio il calco integrale
  - L'efficienza di questo metodo aumenta rispetto agli altri metodi quando la dimensione del problema cresce
- Si basa sulla generazione di campioni casuali e sull'uso di uno stimatore
- Nella computer grafica rappresenta l'approccio migliore per ottenere risultati fotorealistici
  - Esistono diverse tecniche ad-hoc per risolvere particolari istanze dell'equazione di rendering
- Lo svantaggio principale è il suo lento tasso di convergenza

Il metodo Monte Carlo - 1

- Considieriamo il seguente integrale

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

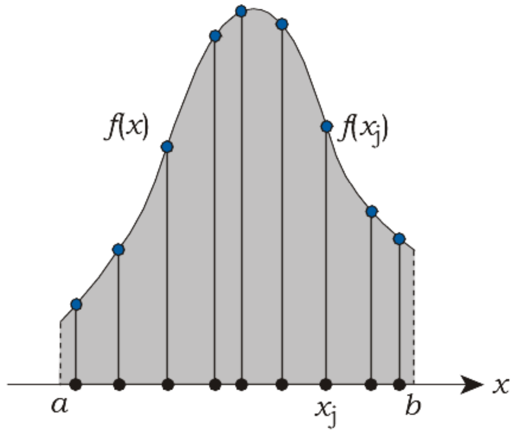
- L'integrazione di una funzione consiste di un operatore matematico che associa alla funzione $f(x)$ l'area sottesa dalla funzione rispetto all'ascissa nell'intervallo $[a,b]$



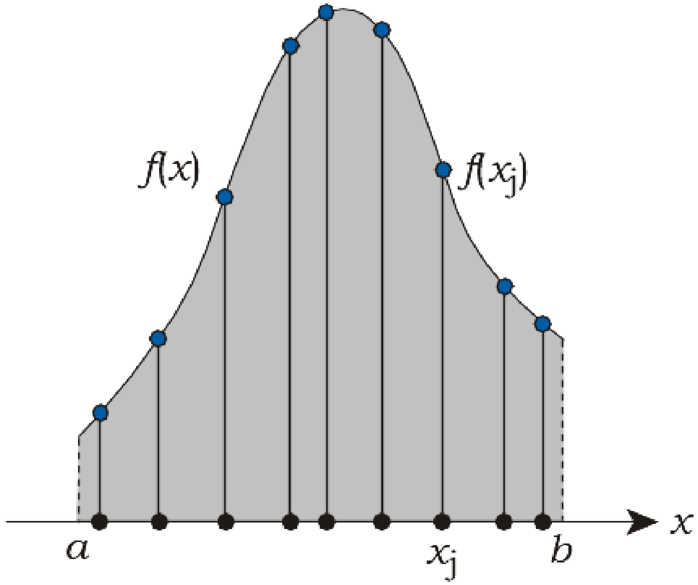
Il metodo Monte Carlo - 2

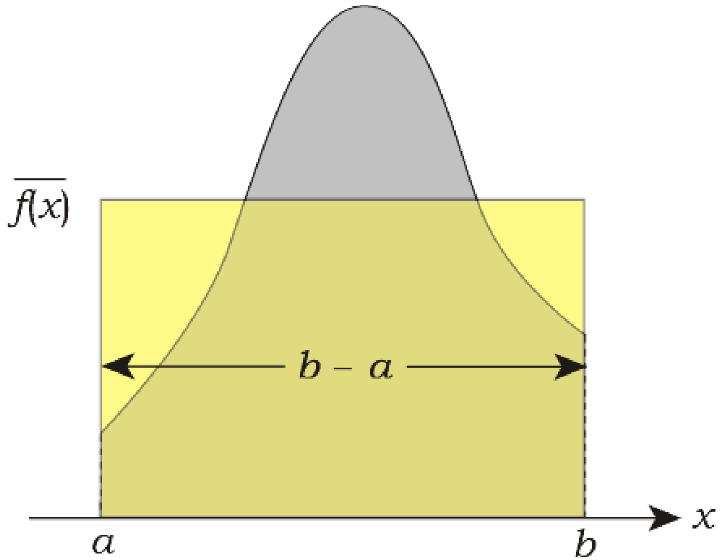
- Nel *metodo Monte Carlo* possiamo stimare il valore dell'integrale calcolando $f(x)$ per n valori di x uniformemente distribuiti nell'intervallo $[a,b]$
- Uno *stimatore* per l'integrale I è definito come

$$\langle I \rangle = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$



Il metodo Monte Carlo - 3





$$\overline{f(x)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

- Intuitivamente il Monte Carlo può essere interpretato osservando che il rettangolo giallo ha la stessa area dell'area in grigio, ovvero

$$I = (b\text{-}a)\,\overline{f(x)}$$

Varianza

- Per misurare l'errore introdotto dal campionamento dei punti possiamo utilizzare la *varianza* per lo stimatore I, definita come

$$V = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left[f(x_j) - \langle I \rangle\right]^2$$

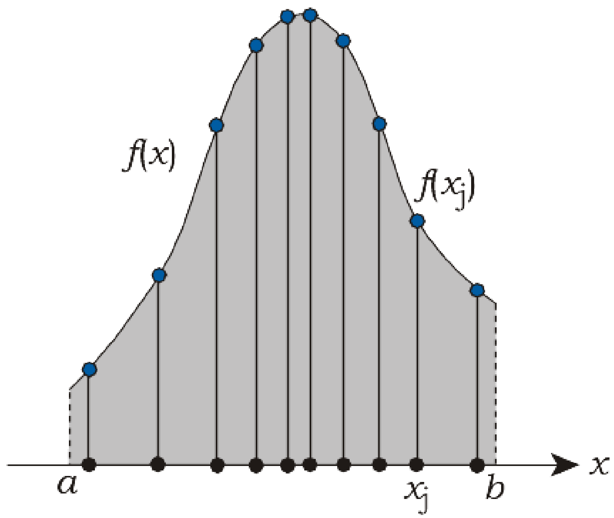
- La *deviazione standard* è definita come $\sigma = \sqrt{n}$

$$\sigma \propto 1/\sqrt{n}$$

- Quadruplicando il numero di punti l'errore si dimezza

Riduzione delle varianza

- Per ridurre la varianza possiamo utilizzare un *campionamento ad importanza* (*importance sampling*)
- L'idea è campionare nei punti in cui la funzione ha un andamento non regolare



Campionamento ad importanza

- La densità dei campioni è specificata utilizzando una funzione di densità della probabilità p(x) tale che

$$P(x_0 \le x \le x_1) = \int_{x_0}^{x_1} p(x)dx$$

- Inoltre la funzione p(x) deve avere le seguenti proprietà

$$p(x) \ge 0 \; \forall x \in [a,b]$$

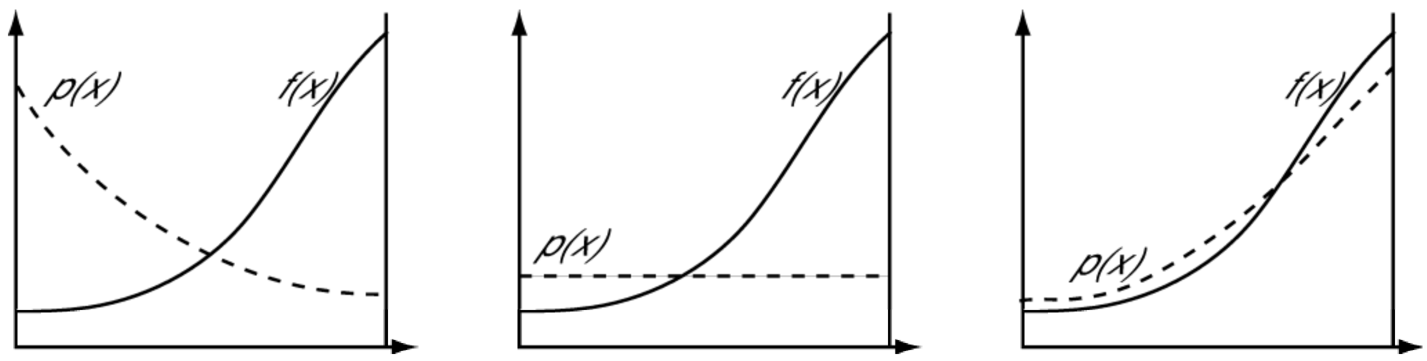
$$\int_b^a p(x)dx = 1$$

Stimatore nel campionamento ad importanza

- Lo stimatore da utilizzare per il metodo Monte Carlo è

$$\langle I \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_j)}{p(x_j)}$$

- Una funzione di densità ottimale sarebbe $p(x)=f(x)/I$
  - In tal caso la varianza sarebbe zero ma $f(x)$ non è nota



In conclusione

- Uno stimatore per l'integrale

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

è uguale a

$$\langle I \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_j)}{p(x_j)}$$

- Sono necessari tre passi
  1. Generare un insieme di campioni utilizzando una funzione di distribuzione della probabilità
  2. Valutare la funzione per ogni campione
  3. Calcolare una media pesata dai valori della funzione