PROGETTO LAUREE SCIENTIFICHE
SCIENZE CHIMICHE

Corso di formazione per insegnanti di scienze
18-25 maggio 2006

LA DIMENSIONE FRATTALE

Luciano D'Alessio
Dipartimento di Chimica
Università della Basilicata

Riassunto

Obiettivo dell'esercitazione é la determinazione della dimensione frattale di un oggetto naturale con il metodo del "box counting" utilizzando programmi commerciali e dimostrativi. Saranno fornite tutte le istruzioni per introdurre in modo elementare l'apparato concettuale e per replicare l'esperimento in ambito scolastico. Fondamentale sarà l'utilizzo di internet per l'acquisizione delle informazioni, la visualizzazione delle simulazioni e il recupero del software.

1. Alla ricerca della SCI

In questa presentazione verrà introdotto il concetto di "web chemistry" attraverso la ricerca in rete, la simulazione al computer e l'elaborazione digitale delle immagini.
Il punto di partenza é il motore di ricerca Google accessibile all'indirizzo:
http://www.google.it

Da questo sito é possibile eseguire rapidamente e con estrema facilità la ricerca di pagine web e di immagini. Cercheremo il sito della Società Chimica Italiana digitando nell'apposita casella le parole chiave:

società chimica italiana

Cliccando sul pulsante:

Cerca

vengono mostrati i risultati della ricerca, ben 1,320,000, il primo dei quali è quello che ci interessa e ci porta all'indirizzo della SCI:

http://www.soc.chim.it

Quella che si trova é la "home page" ossia la pagina iniziale di una delle più importanti società scientifiche italiane il cui "obiettivo fondamentale è la divulgazione della scienza chimica e delle sue applicazioni, così da evidenziare l'importanza che essa riveste nella società moderna". Da qui é possibile accedere a tutte le informazioni sulle attività della società e alle pagine web delle sue Sezioni Regionali, Divisioni e Gruppi Interdivisionali. In particolare cliccando sul pulsante:

Sezioni Regionali

si accede al loro elenco, dal quale scegliendo:

Sezione Basilicata

si é introdotti nella scheda della sezione della nostra regione. Se ora si clicca su:

Per maggiori informazioni sulla sezione

è possibile visualizzare l'elenco delle attività della sezione. Tra queste vi invito a scegliere dal pulsante:

EVENTI

la presentazione:

Voglia di Chimica

relativa alla Giornata di Comunicazione e Didattica della Chimica svolta il 25 Marzo 2002 presso questa Università. Tra i vari interventi vi invito a visionare quello del sottoscritto dal titolo:

Chimica frattale

che utilizzeremo come introduzione per la nostra esercitazione. Però anche gli altri contributi possono fornire spunti di notevole interesse didattico; una loro versione ampliata e illustrata é anche disponibile a stampa nel volume "Storie di chimica e oltre" a cura di V. Villani [1] dove é mostrata una visione non convenzionale della chimica.

2. I frattali questi sconosciuti

Il testo della mia presentazione, che é anche raggiungibile direttamente all'indirizzo:

http://www.unibas.it/utenti/villani/Eventi/Voglia%20di%20Chimica/D'Alessio.html

fornisce l'occasione per parlare di oggetti frattali e per riflettere sul concetto di dimensione. Partendo da un semplice esperimento di elettrochimica il discorso si estende ai fenomeni di aggregazione fuori equilibrio e alla crescita di strutture note col nome di DLA o "diffusion limited aggregation" ovvero aggregazione limitata dalla diffusione. Si tratta di un fenomeno estremamente importante dal punto di vista chimico-fisico in quanto ubiquitario in natura, che ci porta a introdurre quegli oggetti matematici chiamati frattali caratterizzati dalla proprietà apparentemente paradossale di possedere una dimensione frazionaria.

Vi invito a leggere il testo cercando di evidenziare i seguenti aspetti:

1) esperimento
2) modello
3) simulazione
4) universalità
5) morfologia
6) dimensionalità
7) frattalità

Approfondiamo brevemente ciascuno di questi temi.

1) La formazione di aggregati frattali negli esperimenti di deposizione elettrolitica é un fenomeno ben noto e ampiamente descritto in letteratura [2, 3], anche se non ancora presente nei libri di testo scolastici. La loro realizzazione non richiede laboratori attrezzati o particolari dispositivi, ma solo materiali facilmente reperibili in commercio, e può essere utilizzata per una semplice dimostrazione in aula.

2) Il modello della crescita elettrolitica é stato proposto da Witten e Sander nel 1981 ed é particolarmente istruttivo perché nonostante la sua estrema semplicità microscopica produce risultati di notevole complessità macroscopica, oltre che gradevoli dal punto di vista estetico. Con piccole varianti é in grado di riprodurre con grande accuratezza le varie forme di aggregati che si osservano sperimentalmente in natura.

3) La simulazione può essere considerata un vero e proprio esperimento numerico, dove é possibile variare i parametri ed ottenere risultati in tempo reale. Il modello dell'aggregazione diffusiva si presta ad una semplice implementazione su un personal computer. Non é difficile scrivere un programma per visualizzare sul monitor la crescita di una DLA in due dimensioni. Un esempio in BASIC, riportato nel libro di Vicsek [4], non richiede più di 87 righe di codice. Chi non é interessato alla programmazione può visualizzare la simulazione in rete all'indirizzo:

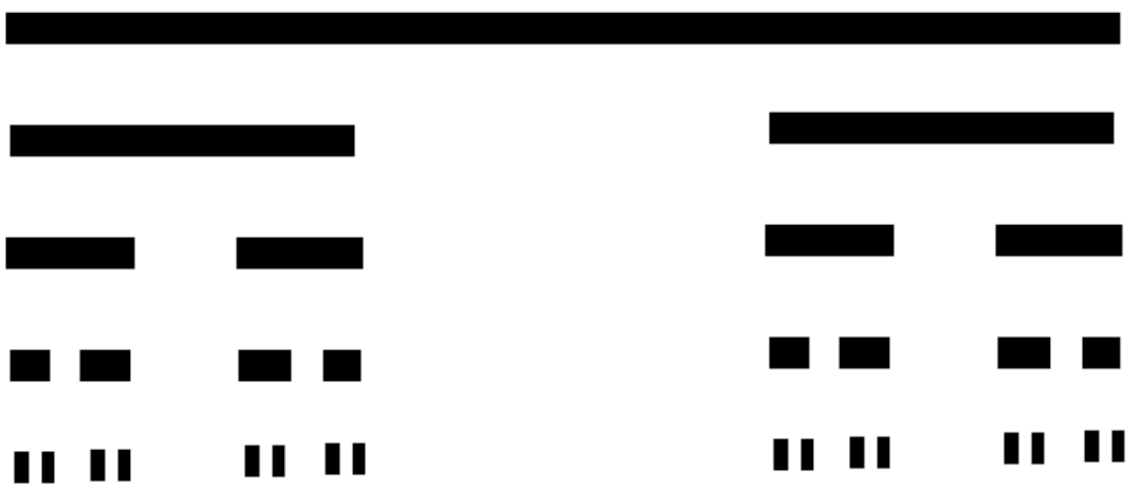
http://apricot.polyu.edu.hk/~lam/dla/dla.html

4) Il risultato più sorprendente é che la struttura degli aggregati elettrochimici é ampiamente diffusa in natura [5] anche in ambiti estremamente diversificati, come i depositi di minerali [6] e la crescita delle colonie batteriche [7]. Una panoramica su questa universalità di comportamento é riportata in:

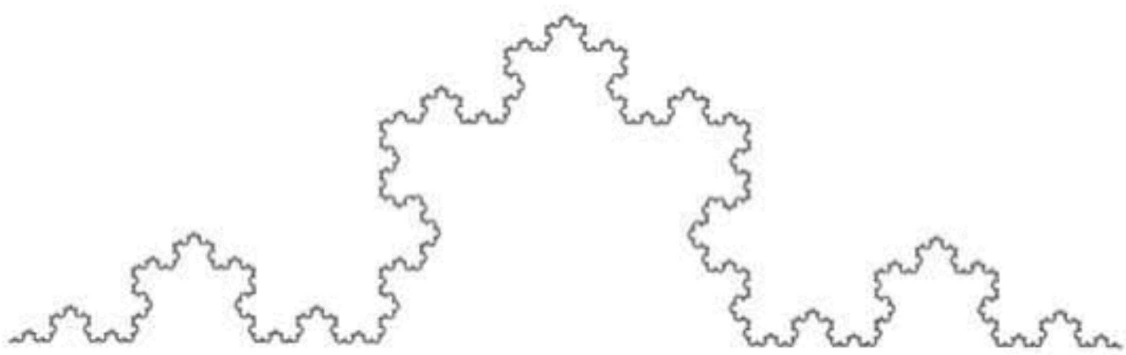
http://polymer.bu.edu/~trunfio/images.html

dove é possibile osservare una galleria di immagini, prese da contesti diversi,

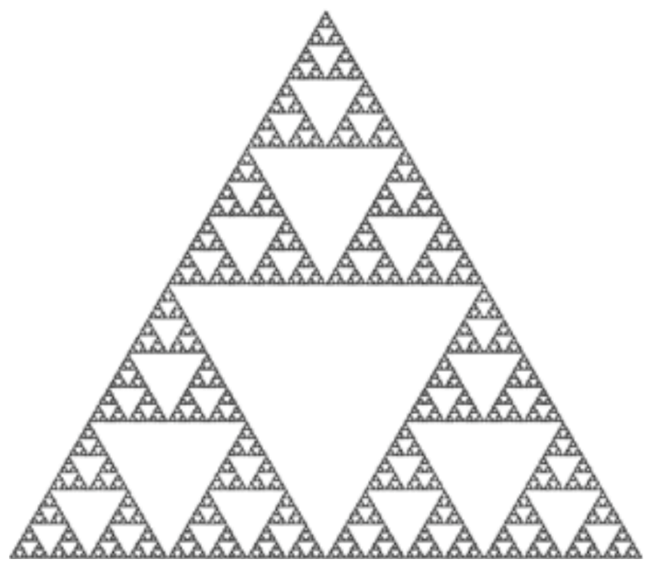
nelle quali si ripete sostanzialmente la stessa forma.
5) La morfologia degli aggregati diffusivi non può essere descritta dagli enti della geometria euclidea. Qui interviene il concetto di frattale, ovvero un oggetto caratterizzato da una dimensione frazionaria e dalla proprietà di autosimilitudine. Quest'ultimo termine significa che una porzione dell'oggetto opportunamente ingrandita é simile al tutto. La natura é piena di forme di qusto tipo: alberi, rocce, montagne, nuvole, strutture biologiche, corsi d'acqua, linee di costa, galassie [8]. Si può dire che tutto l'universo é un enorme frattale [9].
6) La dimensione frattale di un oggetto rappresenta allo stesso tempo il grado di irregolarità, la capacità di riempimento dello spazio e il livello di autosomiglianza. Quest'ultimo concetto é ben evidente in alcune figure classiche della geometria frattale, come la polvere di Cantor:



la curva di Koch:



e il triangolo di Sierpinski:



In questi casi la dimensione frattale può essere calcolata facilmente con l'equazione:

d = ln(N)/ln(S)

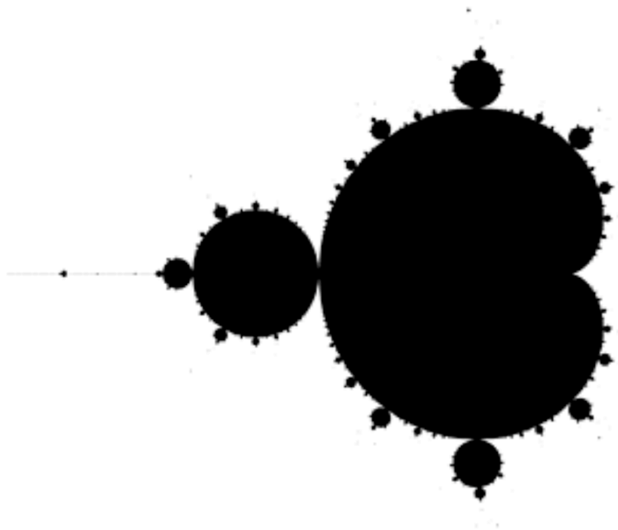
in cui N è il numero delle parti autosimili, in cui un oggetto può essere suddiviso, ed S é il fattore di scala per cui bisogna moltiplicare ciascuna delle parti per sovrapporla al tutto. Questa equazione fornisce per i tre oggetti mostrati sopra i seguenti valori:

Polvere di Cantor: d = ln 2/ln 3 = 0.63

Curva di Koch: d = ln 4/ln 3 = 1.26

Triangolo di Sierpinski: d = ln 3/ln 2 = 1.58

7) Oggi il termine frattalità é sinonimo oltre che di dimensionalità frazionaria, anche di irregolarità a tutte le scale, di complessità, di autoreferenzialità. A questo proposito l'insieme di Mandelbrot:



che é stato definito l'oggetto più bello e più complicato della matematica, può essere considerato il paradigma dei sistemi autorappresentativi. Il suo contorno é talmente involuto che ha dimensione 2, la stessa della regione interna. Ad ogni ingrandimento presenta sempre nuovi dettagli. Mi piace pensarlo come una metafora dell'universo. Inoltre i frattali sono un ingrediente indispensabile nella teoria del caos deterministico [10] perché permettono di comprendere il comportamento di quei sistemi dinamici in cui non é possibile fare previsioni a causa della sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali [11]. Sistemi di questo tipo sono per esempio i fenomeni meteorologici, dove la difficoltà di previsione a lungo termine é ben nota.

3. Misuriamo la complessità

La parte sperimentale di questa esercitazione consiste nella misura della dimensione frazionaria di un oggetto naturale la cui immagine é stata acquisita mediante una fotocamera digitale o uno scanner. I programmi necessari saranno scaricati dalla rete o forniti su CD. Saranno fornite istruzioni dettagliate affinché le procedure suggerite possano essere realizzate facilmente in ambito scolastico. Il metodo utilizzato é quello del "box counting", ossia del conteggio dei quadretti, ampiamente descritto nella mia presentazione "Chimica frattale". Qui voglio solo mostrare come si utilizza un programma dimostrativo per visualizzare l'algoritmo. Il programma in questione può essere scaricato dal sito:

`http://polymer.bu.edu/ogaf`

dove cliccando sul pulsante:

`Software Downloads for Macintosh, Windows, and Java`

viene mostrata una lista di programmi scaricabili gratuitamente. Scegliere:

`fractaldim.zip`

per Windows. Apparirà una finestra di dialogo nella quale bisogna cliccare sul pulsante:

`Save`

per registrare il file sull'hard disk del computer. Verrà creato un file zip denominato "fractaldim" contenente un archivio in formato compresso. Alla fine del "download" pigiare:

`Close`

e aprire il file con winzip. Usando il comando:

`Extract`

e selezionando:

`New Folder`

é possibile creare sulla scrivania una cartella in cui verranno registrati tutti i file decompressi. Aprire la cartella e lanciare il progrmma "fractaldim". Durante l'esecuzione del programma é possibile selezionare l'immagine, di cui si vuole calcolare la dimensione, dal menù:

`Sample Images`

Scegliere il file:

DLA1.BMP

e selezionare con l'apposito cursore la grandezza dei box. Pigiando sul pulsante:

Count

verrà eseguito il conteggio. Ripetere con altri valori e alla fine cliccare sulla finestrella:

Graph fo...

per visualizzare il grafico in scala bilogarimica e l'equazione della retta interpolante. L'esponente di X cambiato di segno fornisce la dimensione frattale.

Ripetere scegliendo l'immagine:

DLA2.BMP

e osservare come cambia la dimensione. Ripetere ancora scegliendo liberamente altre immagini, per esempio:

BOXBLACK.BMP

CARPET34.BMP

GASKET.BMP

e confrontare i risultati con le dimensioni esatte, ove possibile.

A questo punto useremo un programma professionale, che fornisce risultati più accurati, per determinare la dimensione frattale di oggetti reali la cui immagine é stata acquisita mediante uno scanner o una fotocamera digitale.

Il programma, denominato "Benoit", si può acquistare in rete sul sito:

http://www.trusoft.netmegs.com

Noi useremo la versione 1.01 disponibile su CD. Si tratta di un programma molto versatile che consente di misurare le proprietà frattali di un insieme di dati usando una scelta tra dieci metodi di calcolo diversi. Per eseguire il programma seguire le istruzioni:

1) inserire il disco "Benoit" nel lettore CD

2) dal menù "start" selezionare "my computer"

3) fare doppio clic sull'icona del CD-ROM

4) aprire la cartella "Benoit 1.01"
5) lanciare il programma "benoit"
6) chiudere la finestra di informazioni
7) selezionare l'algoritmo
8) scegliere il file da analizzare
9) premere il pulsante "ok" e osservare i risultati
10) tornare al livello precedente e ripetere con altra immagine

Vi sarete accorti che le figure utilizzate da questo programma sono bianche su fondo nero. Questo significa che una foto a colori o l'immagine acquisita con uno scanner devono essere preventivamente "filtrate" utilizzando un programma di elaborazione digitale delle immagini, come per esempio ImageJ scaricabile gratuitamente dal sito:

`http://rsb.info.nih.gov/ij/download.html`

Con questo programma si può fare l'inversione di una foto con il comando:

```
Edit
Invert
```

e se ne può registrare una selezione con la sequenza:

```
File
New
Fill with
Clipboard
Save As
BMP
```

Il file va salvato con l'estensione bmp in modo da poter essere letto da "Benoit".

Tutti i programmi usati fin'ora calcolano le dimensioni di figure piane. Quello che ci si chiede è che relazione esiste tra la dimensione frattale di un oggetto che si sviluppa nello spazio tridimensionale e quella di una sua fotografia, ossia di una proiezione sul piano. Questo problema é collegato alla frattalità dell'universo. Il cielo é una proiezione dell'universo: se quest'ultimo é un frattale con dimensione minore di 2, allora anche la sua proiezione sarà un frattale con la stessa dimensione. Ciò é conseguenza del teorema dell'ombra [12]: se l'ombra di un albero ha una dimensione minore di 2 anche l'albero avrà la stessa dimensione; se invece l'ombra è continua, senza macchie di luce, significa che la dimensione dell'albero è maggiore o uguale a 2.

4. Per saperne di più

In questa presentazione ho mostrato solo gli aspetti più elementari della geometria frattale e delle sue implicazioni. E' possibile approfondire a volontà gli argomenti trattati consultando la rete e la letteratura nazionale e internazionale. Si rimarrà stupiti nel constatare in quanti campi, non solo nella matematica, la teoria dei frattali ha trovato applicazione. La letteratura sui frattali é sterminata. Se andate su Google e scrivete:

`frattali`

trovate circa 183,000 pagine in italiano. Scrivendo:

`fractals`

si hanno 7.910.000 pagine in inglese. La ricerca:

`geometria frattale`

fornisce 41,200 risultati, mentre da:

`fractal geometry`

se ne ottengono ben 1,780,000. Al primo posto di questi ultimi si trova la pagina web di Benoit Mandelbrot, il padre dei frattali, all'università Yale:

`http://classes.yale.edu/fractals`

Qui c'é un "tutorial" che é sicuramente il miglior posto da cui partire per un approfondimento in rete. Altrimenti si può navigare liberamente tra testi e immagini. Un altro sito interessante è:

`http://hypertextbook.com/chaos`

oppure la voce "fractals" dell'enciclopedia "on line":

`http://en.wikipedia.org/wiki/Fractals`

Sul sito:
http://kosmoi.com/Science/Mathematics/Fractals
al pulsante:
Mandelbrot Applet
c'è la possibilità di esplorare l'insieme di Mandelbrot.
Per quanto riguarda la letteratura in lingua italiana desidero innanzi tutto segnalare i numerosi articoli che sono comparsi negli ultimi anni sulla rivista "Le Scienze", edizione italiana di "Scientific American", alcuni dei quali sono raccolti nel volume "Il Caos" [13] pubblicato dalla stessa casa editrice, il cui sito web è:
http://www.lescienze.it
Vale anche la pena di consultare la sua sorella francese denominata "Pour la Science", raggiungibile all'indirizzo:
http://www.pourlascience.com
Per quanto riguarda i libri è possibile fare ricerche, consultare cataloghi ed effettuare acquisti "on line" sui seguenti siti:
http://www.internetbookshop.it
http://www.bol.it
http://www.libreriauniversitaria.it
Per i testi in lingua inglese é possibile contattare:
http://www.amazon.com
http://www.barnesandnoble.com
http://www.powells.com
http://www.abebook.com
Infine una ricca collezione di classici si può trovare in:
http://store.doverpublications.com
Tutte le librerie "on line" accettano pagamenti con carta di credito, cosa che rende agevole l'accesso alla letteratura mondiale anche da regioni come la basilicata dove non esistono librerie internazionali.
Ad ogni modo riporto in bibliografia alcuni titoli [14 - 24] che considero fonda-

mentali, anche se la mia idea é sostituire completamente il materiale cartaceo con quello digitale. Insomma una scuola senza libri !

5. conclusioni

Oggi la geometria frattale e la teoria del caos sono diventati un modello paradigmatico anche al di fuori dei contesti canonici. Per esempio leggo nella storia del cinema italiano di Brunetta: "Negli ultimi vent'anni i poteri visivi dei registi italiani si sono diversificati e moltiplicati in modo tale che per studiarli a fondo sarebbe necessario ricorrere alla geometria dei frattali" [25]. E più oltre: "Il modo migliore per capire, in senso topologico, le relazioni dei singoli con l'insieme é quello di ricorrere alla figura matematica delle polveri di Cantor. Ossia del riconoscimento di una gran quantità di punti distribuiti e fluttuanti nello spazio mancanti di un piano comune d'appoggio" [26]. Ne segue la necessità di fornire anche agli studenti delle scuole gli elementi di questo linguaggio unificatore, che oltre a costituire una chiave di lettura per molti fenomeni naturali e a sollecitare visivamente attraverso le incredibili forme ottenibili al computer [27, 28], permette di avvicinarsi al mondo della ricerca scientifica contemporanea e di apprezzarne le implicazioni non solo in campo matematico ma anche in importanti settori applicativi. Una domanda che mi sento ripetere spesso é: "A cosa servono i frattali ?". E' una domanda alla quale non rispondo più !
Vorrei concludere con una proposta per un progetto multidisciplinare da svolgere in ambito scolastico con il coinvolgimento dei docenti delle materie letterarie, filosofiche, artistiche, oltre che scientifiche. La teoria dei frattali é per sua natura trasversale rispetto alle discipline tradizionali non solo del curriculum scolastico ma anche e soprattutto del mondo della cultura. Consente di tracciare dei percorsi concettuali diversificati e stimolanti nei quali possono confluire le più svariate competenze. Per un esempio concreto si veda il progetto, consultabile alla pagina web:

http://www.galileimirandola.it/frattali
messo a punto dai docenti dell'Istituto Superiore Statale "G. Galilei" di Mirandola, Modena. Si veda anche la relazione di A. Codetta Raiteri alla conferenza CIEAM 57 in:
www.maecla.it/ricerca_azione/RELAZIONE%20ITALIANA.doc
oppure:
www.maecla.it/ricerca_azione/griglia_secondaria_primo_grado_e_documenti_di_Adalberto/RELAZIONE%20ITALIANA.pdf
dove sono riportati i risultati di una interessante sperimentazione didattica.

Bibliografia

[1] V. Villani (a cura di), Storie di chimica e oltre, Testi di L. Ambrosone, R. Barberi, G. Celebre, M. Compiani, L. D'Alessio, A. Di Meo, D. Ferro, P. Greco, P. Musso, P. Riani, R. Teghil, G. Villani, V. Villani, ARACNE Editrice, Roma, 2005.
[2] M. Matsushita, Experimental observations of aggregations, in D. Avnir (Ed.), The fractal approach to heterogeneous chemistry, John Wiley & Sons, Chichester, 1989, p. 161.
[3] P. Meakin, Fractals, scaling and growth far from equilibrium, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, p. 328.
[4] T. Vicsek, Fractal growth phenomena, World Scientific, Singapore, 1992, p. 467.
[5] P. Ball, The self-made tapestry, Pattern formation in nature, Oxford University Press, Oxford, 2001, p. 110.
[6] B. Chopard, H. J. Herrmann, T. Vicsek, Structure and growth mechanism of mineral dendrites, Nature, Vol. 353, 3 october 1991, p. 409.
[7] A. M. Lacasta, I. R. Cantalpiedra, C. E. Auguet, A. Penaranda, L. Ramirez-Pi-

scina, Modeling of spatiotemporal patterns in bacterial colonies, Physical Review E, Vol. 59, No.6, June 1999, p. 7036.
[8] J. Briggs, L'estetica del caos, Avventure nel mondo dei frattali: scienza, arte e natura, red edizioni, Como, 1993.
[9] Y. Baryshev, P. Teerikorpi, La scoperta dei frattali cosmici, Bollati Boringhieri, 2006.
[10] H. G. Schuster, Deterministic chaos, An introduction, VCH, Weinheim, 1995, p. 140.
[11] S. H. Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos, With applications to physics, biology, chemistry, and engineering, Addison-Wesley, Reading, 1994, p. 320.
[12] K. Falconer, Fractal geometry, Mathematical foundations and applications, p. 83, Wiley, Chichester, 1995.
[13] G. Casati (A cura di), Il caos, Le leggi del disordine, Le Scienze S.p.A, Milano, 1991.
[14] B. B. Mandelbrot, Gli oggetti frattali, Forma, caso e dimensione, Einaudi, Torino, 1987.
[15] B. B. Mandelbrot, La geometria della natura, Sulla teoria dei frattali, Theoria, Roma, 1989.
[16] B. B. Mandelbrot, Nel mondo dei frattali, Di Renzo, Roma, 2001.
[17] J. Gleick, Chaos, La nascita di una nuova Scienza, Rizzoli, Milano, 1989.
[18] S. Carrà, La formazione delle strutture, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.
[19] A. Vulpiani, Determinismo e caos, La Nuova Italia Scientifica, Roma, 1994.
[20] B. B. Mandelbrot, The fractal geometry of nature, Freeman, New York, 1983.
[21] M. Barnsley, Fractals everywhere, Academic Press, San Diego, 1988.
[22] B. H. Kaye, A random walk through fractal dimensions, VCH, Weinheim, 1989.

[23] H. Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe, Chaos and fractals, New frontiers of science, Springer-Verlag, New York, 1992.
[24] B. Sapoval, Universalités et fractales, Jeux d'enfant ou délits d'initié ?, Flammarion, France, 1997.
[25] G. P. Brunetta, Cent'anni di cinema italiano, Vol. 2, Dal 1945 ai nostri giorni, Laterza, Bari, 2001, p. 211.
[26] G. P. Brunetta, Ibidem, p. 349.
[27] H. O. Peitgen, P. H. Richter, La bellezza dei frattali, Bollati Boringhieri, Torino, 1988.
[28] R. L. Devaney, Chaos e frattali, Matematica dei sistemi dinamici e applicazioni al calcolatore, Addison-Wesley Italia, 1990.