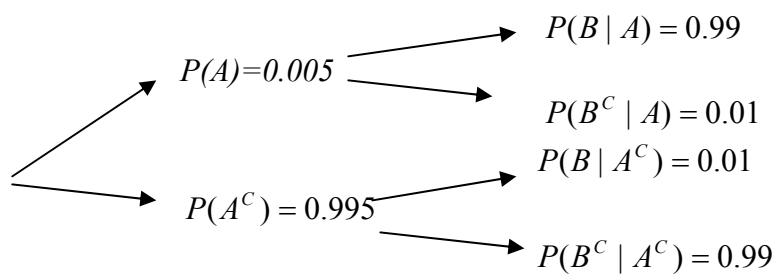


Soluzioni prova scritta di Calcolo delle Probabilità (v.o. Cdl Ingegneria Meccanica)

1. Per calcolare $E[I]$ è necessario calcolare $E[e^{aV}]$. Ricordando che $E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx$ dove X è una variabile aleatoria con funzione densità di probabilità pari a $f(x)$ si ha $E[e^{aV}] = \int_1^3 \frac{e^{av}}{2} dv$ poiché per una variabile aleatoria V uniforme sull'intervallo (1,3) la funzione densità di probabilità ha la forma $f(v) = \begin{cases} \frac{1}{3-1} & v \in (1,3) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$. Pertanto nel caso esaminato, risulta $E[e^{aV}] = \frac{e^{3a} - e^a}{2a} = 326887$. Poiché per linearità si ha $E[I] = I_0(E[e^{aV}] - 1)$ risulta $E[I] = 0.326886$.

2. L'intervallo di confidenza per p ha ampiezza $h = 2z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$. Bisogna determinare il valore di n tale che tale ampiezza per $\hat{p} = \frac{26}{30}$ e $z_{0.005} = 2.58$ sia pari a $h=0.05$, ossia $n = 4 \frac{2.58^2}{0.05^2} \frac{26}{30} \left(1 - \frac{26}{30}\right) \approx 1231$. Dobbiamo allora testarne altri 1201. Immaginando di trovarne 1040 accettabili, l'intervallo di confidenza finale che ne risulta è dato da $\frac{1066}{1231} \pm \frac{z_{0.005}}{1231} \sqrt{1066 \left(1 - \frac{1066}{1231}\right)}$ ovvero (0.8409;0.8910) che ha effettivamente un'ampiezza di circa 0.05.

3. Si tratta di applicare uno schema di tipo Bayes. Gli eventi sono A='persona malata', B='risultato test positivo'.



L'esercizio chiede di calcolare $P(A|B)$ ossia

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} = 0.33$$

4. Bisogna effettuare un test chi-quadrato.

Classi	Frequenze	Frequenze attese
0	366	440*0,82=360.8
1	68	440*0,15=66
>1	6	440*0.03=13.2

La statistica test ha valore 4.06 che confrontata con il quantile $\chi_{0.05,2}^2 = 5.99$ autorizza a ritenere che questa popolazione presenta un profilo di rischio diverso da quello generale.

5. (a) Lo stimatore D è corretto poiché $E[D] = \lambda E[D_1] + (1-\lambda)E[D_2] = \vartheta$.

(b) La varianza risulta $\text{var}(D) = \lambda \text{var}(D_1) + (1-\lambda) \text{var}(D_2) = \lambda \sigma_1^2 + (1-\lambda) \sigma_2^2$.

(c) $\text{var}(D)$ come funzione di λ è una retta $\text{var}(D) = \lambda(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + \sigma_2^2$. Tale retta è crescente se $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ in tal caso il valore minimo viene assunto per $\lambda = 0$ ed è pari a σ_2^2 , decrescente se $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ in tal caso il valore minimo viene assunto per $\lambda = 1$ ed è pari a σ_1^2 mentre risulta costante se $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.