Soluzioni prova scritta di Calcolo delle Probabilità (v.o. Cdl Ingegneria Meccanica)

1. Per calcolare E[I] è necessario calcolare $E\left[e^{aV}\right]$. Ricordando che $E\left[g(X)\right]=\int_{\Re} g(x)f(x)dx$ dove *X* è una variabile aleatoria con funzione densità di probabilità pari a *f(x)* si ha $E\left[e^{aV}\right]=\int_1^3 \frac{e^{av}}{2}dv$ poiché per una variabile aleatoria *V* uniforme sull'intervallo (1,3) la funzione densità di probabilità ha la forma $f(v)=\begin{cases} 1/(3-1) & v\in(1,3) \\ 0 & altrove \end{cases}$. Pertanto nel caso esaminato, risulta $E\left[e^{aV}\right]=\frac{e^{3a}-e^{a}}{2a}=326887$. Poiché per linearità si ha $E\left[I\right]=I_0(E\left[e^{aV}\right]-1)$ risulta *E[I]=0.326886.*

2. L'intervallo di confidenza per *p* ha ampiezza $h=2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$. Bisogna determinare il valore di *n* tale che tale ampiezza per $\hat{p}=26/30$ e $z_{0.005}=2.58$ sia paria a *h=0.05*, ossia $n=4\frac{2.58^2}{0.05^2}\frac{26}{30}\left(1-\frac{26}{30}\right)\approx 1231$. Dobbiamo allora testarne altri 1201. Immaginando di trovarne 1040 accettabili, l'intervallo di confidenza finale che ne risulta è dato da $\frac{1066}{1231}\pm\frac{z_{0.005}}{1231}\sqrt{1066\left(1-\frac{1066}{1231}\right)}$ ovvero (0.8409;0.8910) che ha effettivamente un'ampiezza di circa 0.05.

3. Si tratta di applicare uno schema di tipo Bayes. Gli eventi sono A='persona malata', B='risultato test positivo'.

$P(A)=0.005$ → $P(B\mid A)=0.99$, $P(B^C\mid A)=0.01$

$P(A^C)=0.995$ → $P(B\mid A^C)=0.01$, $P(B^C\mid A^C)=0.99$

L'esercizio chiede di calcolare P(A|B) ossia
$$P(A\mid B)=\frac{P(B\mid A)P(A)}{P(B\mid A)P(A)+P(B\mid A^C)P(A^C)}=0.33$$

4. Bisogna effettuare un test chi-quadrato.

Classi	Frequenze	Frequenze attese
0	366	440*0,82=360.8
1	68	440*0,15=66
>1	6	440*0.03=13.2

La statistica test ha valore 4.06 che confrontata con il quantile $\chi^2_{0.05,2}=5.99$ autorizza a ritenere che questa popolazione presenta un profilo di rischio diverso da quello generale.

5. (a) Lo stimatore *D* è corretto poiché $E[D]=\lambda E\left[D_1\right]+(1-\lambda)E\left[D_2\right]=\vartheta$.

(b) La varianza risulta $\mathrm{var}(D)=\lambda\,\mathrm{var}(D_1)+(1-\lambda)\,\mathrm{var}(D_2)=\lambda\sigma_1^2+(1-\lambda)\sigma_2^2$.

(c) $\text{var}(D)$ come funzione di λ è una retta $\text{var}(D) = \lambda(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + \sigma_2^2$. Tale retta è crescente se $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ in tal caso il valore minimo viene assunto per $\lambda = 0$ ed è pari a σ_2^2, decrescente se $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ in tal caso il valore minimo viene assunto per $\lambda = 1$ ed è pari a σ_1^2 mentre risulta costante se $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.