Prova di recupero di Calcolo delle Probabilità[1]
18 Luglio 2005

1. Se una moneta è truccata in modo che la probabilità che esca testa vale quattro volte la probabilità che esca croce, quanto vale la probabilità che esca croce?

2. Calcolare il coefficiente di collasso di un sistema descritto da una variabile uniforme tra 100 e 200 ore. Per una affidabilità stimata al 97%, per quante ore almeno deve funzionare il sistema?

3. Il 5% di un lotto di 100 fusibili è soggetto a controllo casuale prima di essere immesso sul mercato. Se un fusibile non brucia ad un determinato amperaggio l'intero lotto viene rimandato indietro, In realtà il lotto contiene 10 fusibili difettosi. Qual è la probabilità che il lotto sia rispedito indietro? Un compratore temendo che la percentuale di pezzi difettosi sia elevata decide di controllare il lotto finché non trova i difettosi. Qual è la probabilità che sia necessario controllare più di un pezzo per scoprire se il pezzo è difettoso?

4. Da una indagine sul fumo relativa a 150 italiani è risultato che

	Donna	Uomo
Fumatore	50	37
Non fumatore	35	28

(a) Determinare se la distribuzione dei fumatori tra i due sessi è uniforme.
(b) Determinare un intervallo di confidenza al 90% per la percentuale di non fumatori.
(c) Stabilire se può ritenersi uguale la percentuale di fumatori e quella di non fumatori (limitarsi al caso Uomo).

[1] Risultati e correzioni: martedì 26 luglio ore 11.00.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA CALCOLO DELLE PROBABILITA'- 18/07

1. Indicata con p la probabilità che si verifichi l'evento C="uscita croce", la probabilità che si verifichi l'evento T="uscita testa" è $4p$. Poiché deve essere $4p+p=1$ risulta $p=1/5$.
2. La funzione densità di una v.a. uniforme in [100,200] vale 0 al di fuori di questo intervallo, mentre assume valore 1/100 per $x\in[100,200]$. La relativa funzione di ripartizione è

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<100 \\ \dfrac{x}{100}-1 & x\in[100,200] \\ 1 & x>200 \end{cases}$$

e la funzione di affidabilità è

$$R(x)=\begin{cases} 1 & x<100 \\ 2-\dfrac{x}{100} & x\in[100,200] \\ 0 & x>200 \end{cases}$$

Pertanto il coefficiente di collasso è

$$Z(x)=\frac{1}{200-x} \quad x\in[100,200].$$

Affinché l'affidabilità del sistema valga 97%, bisogna determinare il valore $\bar{x}$ tale che $R(\bar{x})=0.97$ ossia $0,97=2-\frac{\bar{x}}{100}\Rightarrow \bar{x}=103$.

3. Si tratta di una distribuzione ipergeometrica in cui N=100, K=10, n=5%*100=5. Indicato con X il numero di fusibili difettosi tra i 5 estratti, bisogna determinare $P(X\geq 1)=1-P(X=0)$, dove $P(X=0)=\frac{\binom{90}{5}\binom{10}{0}}{\binom{100}{5}}=0,583$. Sia Y il numero di pezzi investigati dal compratore prima di trovarne uno difettoso. Si tratta di calcolare $P(Y\geq 2)=1-P(Y=1)=0.9$.
4. (a) E' necessario effettuare un test di ipotesi sulla bontà di adattamento, ad esempio un test chi-quadrato. Risulta

Fumatori	Oss. Teoriche	Oss.Empririche
Uomo	43.5	37
Donna	43.5	50

La statistica test vale 1,94. Il quantile è $\chi^2_{0,05,1}=3,84$ pertanto è plausibile ritenere la percentuale dei fumatori uomini uguale alla percentuale di fumatori donna.

(b) L'intervallo di confidenza è $\hat{p}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, ossia $(0,42\pm 0,0078)$.

(c) E' necessario costruire un intervallo di confidenza per la differenza delle percentuali. In tal caso: $(\hat{p}_F-\hat{p}_{NF})\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_F(1-\hat{p}_F)}{87}+\frac{\hat{p}_{NF}(1-\hat{p}_{NF})}{637}}$, ossia (-0.019,0.16). Poiché lo 0 appartiene a questo intervallo è possibile ritenere simili le due percentuali.