

Programma del corso di Calcolo delle Probabilità II

(CdL in Matematica – a.a. 2005/06 – Docente: E. Di Nardo)

6 crediti

- **Richiami di teoria della probabilità**

Esperimento casuale. Spazio campione, sigma-algebra associata e misura di probabilità. Spazio campione di Bernoulli. Eventi generatori. Eventi indipendenti. Limite di una successione di eventi: definizione di limite superiore e di limite inferiore. Legge 0-1. Proprietà di continuità della misura di probabilità. Probabilità condizionata: teorema delle probabilità totali e teorema di Bayes. Variabili aleatorie discrete: funzione massa di probabilità e sue proprietà. Costruzione della funzione di ripartizione. Proprietà della funzione di ripartizione. Esempi di variabili aleatorie discrete: di Bernoulli, binomiale, geometrica e di Poisson. Variabili aleatorie assolutamente continue: funzione densità di probabilità e sue proprietà. Relazione tra densità di probabilità e funzione di ripartizione. Esempi di variabili aleatorie assolutamente continue: gaussiana, esponenziale, uniforme continua. Cenni alla teoria dell'affidabilità. Cenni alle misture di variabili aleatorie. Funzione generatrice dei momenti e sue proprietà.

- **Vettori di variabili aleatorie**

Definizione di vettore casuale. Funzione di ripartizione multivariata e sue proprietà. Costruzione della funzione di ripartizione marginale. Vettore di variabili aleatorie discrete e definizione della massa di probabilità congiunta. Vettore di variabili aleatorie assolutamente continue e definizione della funzione densità di probabilità congiunta. Variabili aleatorie indipendenti. Richiamo al teorema del limite centrale: applicazioni in statistica, approssimazione della variabile aleatoria binomiale e di Poisson con la variabile aleatoria gaussiana. Caso $n=2$: covarianza di due variabili aleatorie e sue proprietà. Correlazione di due variabili aleatorie: studio dei casi $\rho=\pm 1$ e del caso $\rho=0$ (incorrelazione). Cenni alla regressione lineare. Relazione tra indipendenza ed incorrelazione. Varianza di una somma di variabili aleatorie. Studio della densità di probabilità congiunta di due variabili aleatorie gaussiane. Caso $n > 2$: matrice di covarianza e di correlazione. Densità di probabilità congiunta di un vettore aleatorio gaussiano n -dimensionale. Vettore media. Cenni alla media condizionata.

- **Catene di Markov**

Definizione. Insieme degli stati. Probabilità di transizione. Esempi: la passeggiata aleatoria e lo spazio campione di Bernoulli; il problema della rovina del giocatore. Catene di Markov stazionarie. Distribuzione di probabilità iniziale. Matrice stocastica di transizione. Distribuzione di probabilità al passo n e sua relazione con la matrice di transizione. Modello di Ehrenfest. Equazione di Chapman-Kolmogorov. Catene assorbenti: stati assorbenti e stati transienti. Forma canonica della matrice di transizione di una catena assorbente. Matrice fondamentale e suo significato statistico. Tempo medio di assorbimento. Probabilità di raggiungere uno specifico stato assorbente avendo come stato iniziale uno stato transiente. Catene di Markov ergodiche. Catene di Markov regolari. Regime stazionario di una catena di Markov regolare. Relazione della distribuzione di probabilità stazionaria con il vettore fisso della matrice di transizione. Esistenza e significato del vettore fisso della matrice di transizione associata ad una catena di Markov ergodica. Legge dei grandi numeri per le catene di Markov ergodiche (senza dim.). Tempo di primo passaggio e tempo medio di ritorno di una catena di Markov ergodica: calcolo del tempo medio di primo passaggio mediante la matrice fondamentale e del tempo medio di ritorno.

- **Simulazione di una catena di Markov.**

Generatori di numeri pseudocasuali: dispositivi fisici, tavole, algoritmi. Generatori di numeri pseudocasuali congruenziali. Seme di un generatore. Periodo. Simulazione di una passeggiata aleatoria. Generazione dello stato iniziale di una catena di Markov. Simulazione della dinamica stocastica di una

catena di Markov mediante l'uso della matrice di transizione. L'algoritmo di Metropolis per la simulazione di una catena di Markov ergodica. Metodi di Monte Carlo: legge dei grandi numeri (senza dim.). Stima del tempo medio di assorbimento di una catena assorbente. Il metodo di Monte Carlo della media per il calcolo degli integrali. L'uso della probabilità geometrica nei metodi di Monte Carlo: il metodo hit-or-miss per il calcolo degli integrali. L'uso di Buffon.

- **Processi di diramazione**

Definizione ed esempi: rappresentazione mediante somme random. Funzione generatrice di probabilità e sue proprietà. Legge ricorsiva per la funzione generatrice di probabilità associata al numero di individui nella n -esima generazione. Determinazione del numero di individui medio costituenti la n -esima generazione e della relativa varianza. Probabilità di estinzione.

- **Processi di rinnovo**

Definizione di processo di rinnovo e del relativo tempo di attesa: esempi ed applicazioni. Processo di Poisson $N(t)$: definizione ed applicazioni. Uso della funzione generatrice di probabilità per la determinazione della legge di probabilità di $N(t)$. Tempi di attesa in un processo di Poisson: uso della variabile aleatoria con legge gamma e sua relazione con la legge esponenziale. Funzione di rinnovo e sue principali proprietà. Equazione di rinnovo. Studio del tempo residuo di un dispositivo, della vita corrente e della vita totale. Il paradosso dei rinnovi.

- **Processi di Markov**

Definizione. Densità di transizione. Equazione di Smolukowski: sviluppo differenziale in avanti e all'indietro. Momenti infinitesimali: deriva e varianza infinitesimale. Processi di Markov stazionari in senso lato ed in senso stretto. Processi di Markov temporalmente omogenei: caratterizzazione via momenti infinitesimali. Densità stazionaria. Teorema di Pawla (senza dimostrazione). Processi di diffusione. Equazione di Fokker-Planck ed equazione di Kolmogorov. Uso della funzione delta di Dirac per descrivere il comportamento della densità di transizione su intervalli temporali di ampiezza infinitesima. Determinazione della densità stazionaria nel caso di processi di diffusione temporalmente omogenei. Studio del moto browniano o processo di Wiener senza drift: determinazione della densità di transizione via trasformata di Fourier. Calcolo di media, varianza e covarianza. Proprietà del moto browniano. Relazione tra il moto browniano e la passeggiata aleatoria simmetrica. Connessioni tra la teoria del moto browniano e la diffusione del calore. Processo di Wiener con drift: determinazione della densità di transizione via trasformata di Fourier. Calcolo di media e varianza. Proprietà del processo di Wiener. Processo di Ornstein-Uhlenbeck: determinazione della densità di transizione via trasformata di Fourier. Proprietà del processo di Ornstein-Uhlenbeck.

- **Cenni alle equazioni differenziali stocastiche**

Processi stocastici continui: convergenza in media quadratica. Relazione con la continuità della funzione di covarianza. Processi stocastici derivabili: relazione con l'esistenza delle derivate doppie miste della funzione di covarianza. Applicazioni al moto browniano. Equazione differenziale stocastica e relativa forma integrale. Gli integrali di Wiener: caso in cui la funzione integranda è costante e caso in cui la funzione integranda coinvolge processi stocastici. Integrazione stocastica di Ito e di Stratonovich. Trasformazione di una equazione differenziale di Ito in quella di Stratonovich e viceversa. Applicazioni ed uso delle due forme di integrazione. Equazione di Langevin e sua connessione con il processo di Ornstein-Uhlenbeck. Uso delle equazioni differenziali stocastiche nella simulazione di traiettorie di processi stocastici.

Testi di riferimento:

- [1] S. Karlin and H. M. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, 2nd ed., Academic Press, New York, 1975.
[2] S. Karlin and H. M. Taylor, *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1981.