Introduzione alla Generazione di Immagini Fotorealistiche

Corso di Dottorato in Matematica e Informatica
Università degli Studi della Basilicata

Dott. Ugo Erra

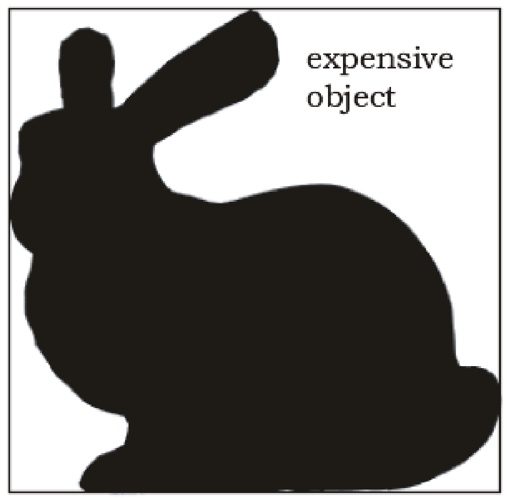
12° Lezione – Intersezioni e Trasformazioni

Sommario

- Bounding box
- Intersezione raggio-triangolo
- Cenni sull’intersezione raggio-oggetti
- Matrici di trasformazioni
- Intersezione raggio oggetti trasformati

Bounding Boxes

- Un oggetto di tipo *bounding box* (BB) è una "scatola" che può essere adoperato per contenere un altro oggetto
- Se un raggio non colpisce l'oggetto bounding box allora non colpirà neanche l'oggetto contenuto all'interno
- Poiché il calcolo dell'intersezione di un raggio con una bounding box è più veloce rispetto dell'oggetto contenuto all'interno avremo risparmiato tempo di elaborazione



Axis-aligned bounding box

- Il più comune BB è il cosidetto axis-aligned bounding box (AABB) i cui lati sono paralleli agli assi del mondo
- In generale un AABB non è renderizzato in quanto non è un oggetto della scena
- Nel determinare l’intersezione è necessario determinare solo se il raggio interseca l’AABB
  - Non ci interessa calcolare il punto di intersezione

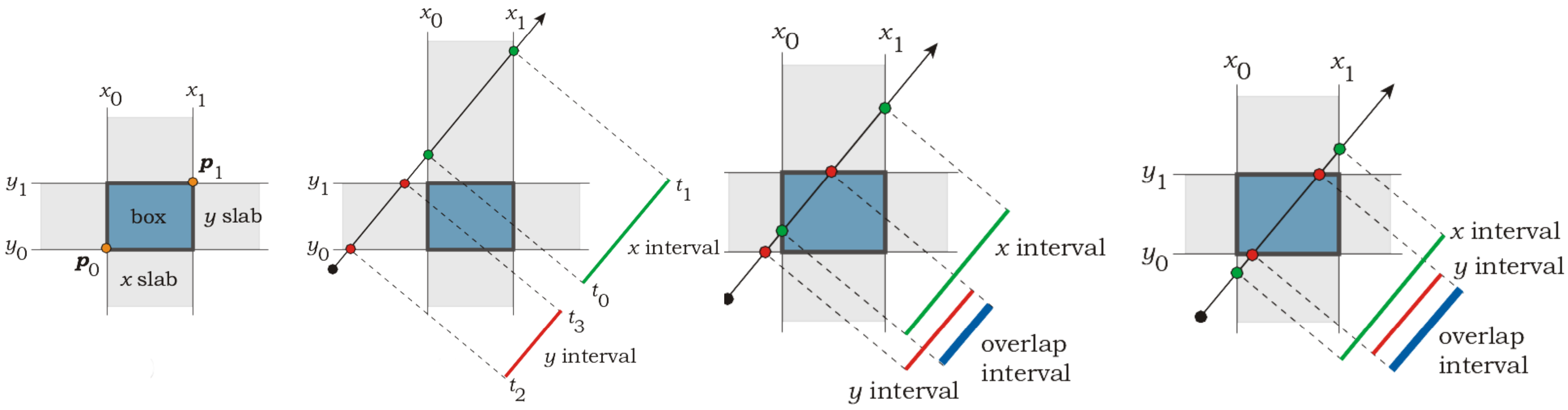
Definizione di un AABB

- Possiamo rappresentare un AABB attraverso gli angoli opposti

$$\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0,z_0) \text{ e } \boldsymbol{p}_1=(x_1,y_1,z_1)$$

dove $x_0<x_1$, $y_0<y_1$ e $z_0<z_{01}$

- Per determinare se un raggio intersecare un AABB consideriamo l'intersezione del raggio con i tre mutualmente perpendicolari "slab"



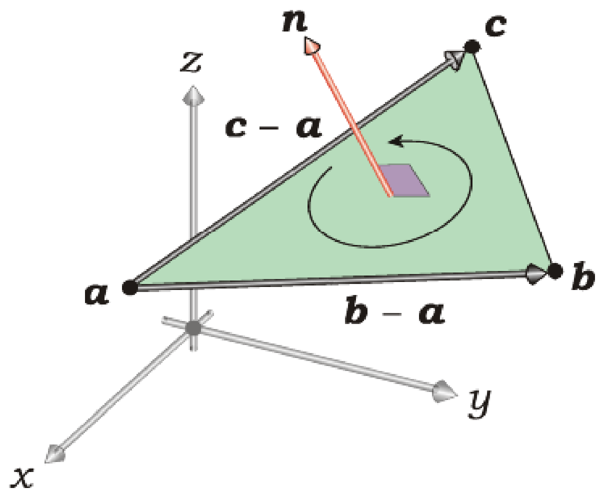
Triangoli

- Nella computer grafica gli oggetti sono modellati utilizzando *mesh* di triangoli
- Una mesh è una collezione di triangoli con vertici condivisi
- Molte applicazione permettono di modellare gli oggetti utilizzando diversi tipi di superfici come spline, NURBS, etc
- Il rendering al termine avviene rappresentando le superfici come triangoli
- In generale il triangolo è considerato la primitiva geometrica di base del real time rendering

Definizione

- Un triangolo è definito attraverso tre punti a,b e c nello spazio chiamati vertici
- Qualunque siano i tre punti il triangolo definisce un piano con una normale ben definita
- La convenzione che si adopera è che guardando la normale in maniera perpendicolare i vertici sono ordinati in senso antiorario

$$\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})/||(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})||$$



Intersezioni - 1

- Per determinare l'intersezione di un raggio con un triangolo dobbiamo determinare prima il punto di intersezione del raggio con il piano definito dal triangolo
- L'algoritmo utilizza le coordinate baricentriche (α,β,γ) per un triangolo con vertici $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$, dove un punto $\boldsymbol{p}$ è definito come

  $$\boldsymbol{p}(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$$

  con la condizione

  $$\alpha+\beta+\gamma = 1$$

- Le coordinate sono definite per il triangolo ma il punto $\boldsymbol{p}$ è definito in generale per il piano di appartenenza

Intersezioni - 2

- Un punto $\boldsymbol{p}$ è interno al triangolo se soddisfa le seguenti disuguaglianze

$$0 < \alpha < 1$$
$$0 < \beta < 1$$
$$0 < \gamma < 1$$

- La condizione può essere riformulata e eliminando una delle coordinate ad esempio $\alpha=1-\beta-\gamma$ e quindi otteniamo

$$\boldsymbol{p}(\alpha,\beta,\gamma) = \boldsymbol{a}+\beta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\gamma(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$$

- Con le seguenti disuguaglianze

$$0 < \beta < 1$$
$$0 < \gamma < 1$$
$$0 < \beta + \gamma < 1$$

Intersezioni - 3

- Se $\beta = 0$ allora il punto $\boldsymbol{p}$ giace sul segmento $\boldsymbol{ac}$

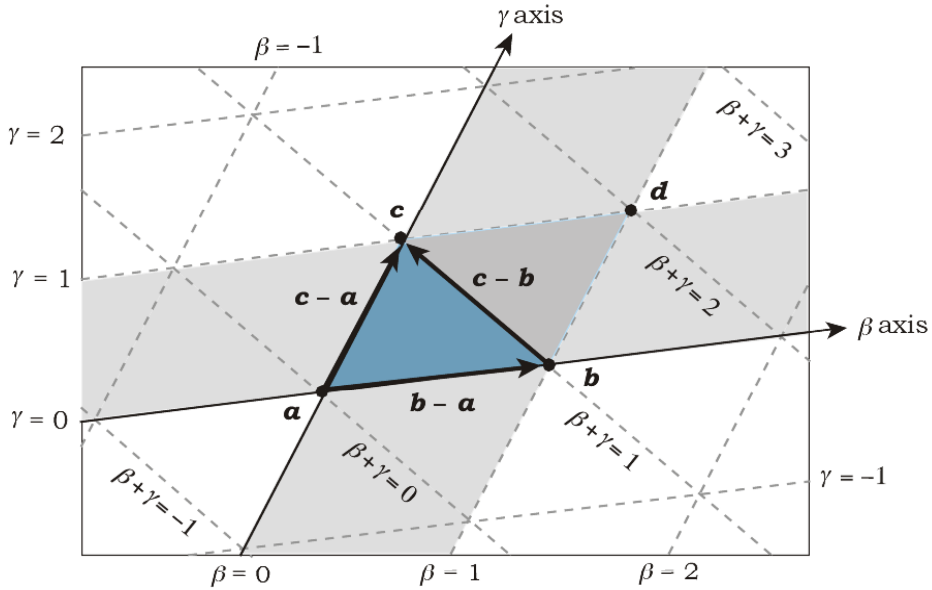
$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \gamma(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$$

- Se $\gamma = 0$ allora il punto giace sul segmento $\boldsymbol{ba}$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \beta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

- Se $\beta + \gamma = 1$ ovvero $\beta = 1 - \gamma$ il punto giace sul segmento $\boldsymbol{cb}$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} + \beta(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})$$



Intersezione - 4

- L'intersezione raggio-triangolo è data dall'uguaglianza

$$\boldsymbol{o} + t\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}+\beta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\gamma(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$$

  ovvero

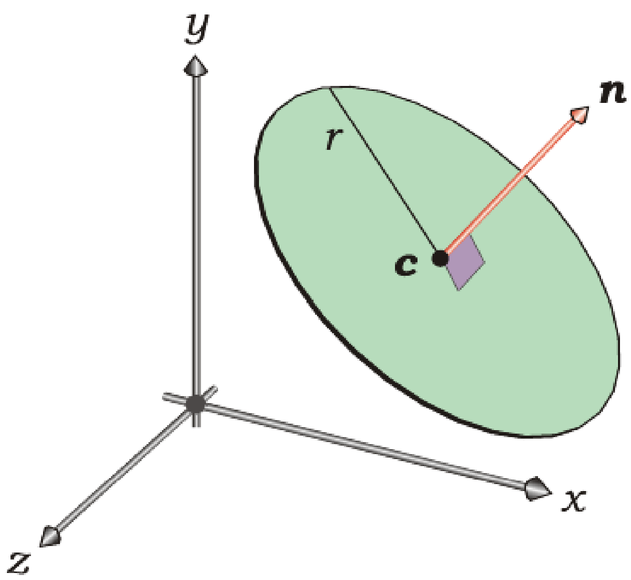
$$\beta(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\gamma(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}) + t\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{o}$$

- Scrivendo per esteso ogni componente

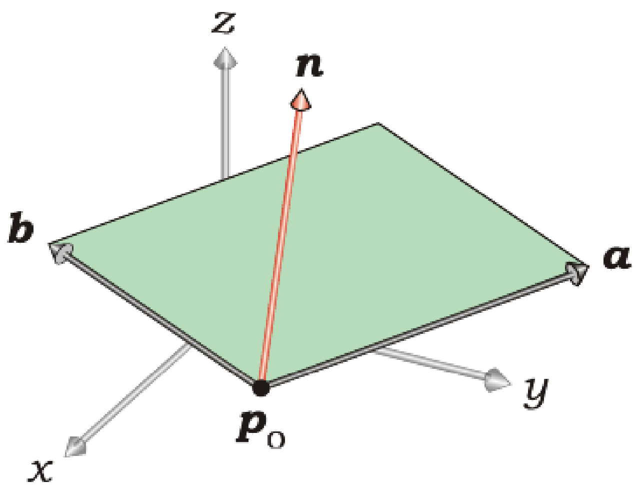
$$\beta(a_x-b_x)+\gamma(a_x-c_x) + td_x = a_x-o_x$$
$$\beta(a_y-b_y)+\gamma(a_y-c_y) + td_y = a_y-o_y$$
$$\beta(a_z-b_z)+\gamma(a_z-c_z) + td_z = a_z-o_z$$

- Otteniamo un sistema di equazioni che possiamo risolvere attraverso la regola di Cramer per ottenere β,γ e t

Altri oggetti



disco



rettangolo

Oggetti generici

- In generale possiamo utilizzare oggetti per i quali è possibile risolvere derivare l'equazioni di intersezione
  - Indipendentemente dalla posizione, dimensione, orientamento e forma
- Per superfici quadratiche

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2eyz+2fxz+2gx+2hy+2jz+k=0$$

  possiamo derivare un'equazione di intersezione se gli oggetti non hanno un orientamento particolare
  - Ellissoidi, paraboloidi, paraboloide ellittico, iperboloidi, coni e cilindri
- Altrimenti dobbiamo utilizzare le trasformazioni affini

Trasformazioni

- Una trasformazione è un'operazione che permette di modellare una scena partendo da semplici primitive
- In base al tipo di trasformazioni possiamo cambiare la dimensione, la forma, l'orientamento e la posizione degli oggetti
  - Possiamo utilizzare le trasformazioni anche per la camera, luci, texture, etc…
- Le *trasformazioni affini* hanno la proprietà di poter essere rappresentate attraverso matrici e preservano le linee rette
  - Ad esempio un raggio trasformato è ancora un raggio

Trasformazioni 2D

- Consideriamo un punto $\boldsymbol{p}=[x,y]^T$ sul piano (x,y)
- Una trasformazione affine applicata al punto $\boldsymbol{p}$ sposta il punto $\boldsymbol{p}$ in una nuova posizione attraverso una coppia di equazioni lineari

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$

- L'espressione può essere scritta sotto forma matriciale nel seguente modo

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ovvero

$$\mathbf{p}' = T\mathbf{p}$$

- Dove $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ è chiamata *matrice di trasformazione*

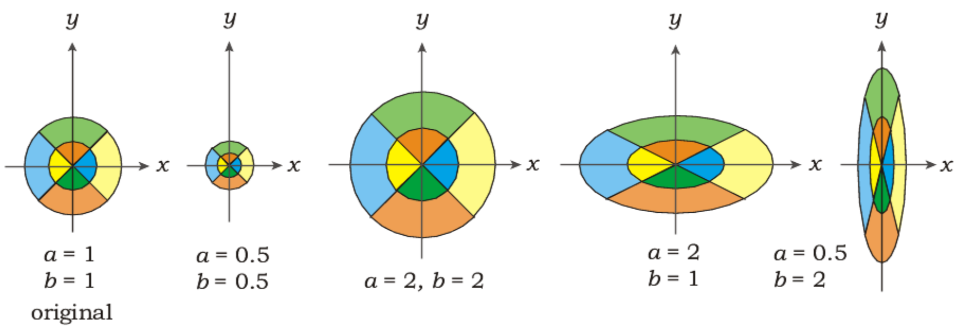
Ridimensionamento (Scaling)

- Un'operazione di scaling permette di modificare la dimensione di un oggetto
- La matrice di trasformazione in questo caso risulta

$$S = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

- Dove a e b sono i parametri di scala e modificano la componente x ed y del punto
- In effetti la trasformazione risulta essere

$$x' = ax$$
$$y' = by$$



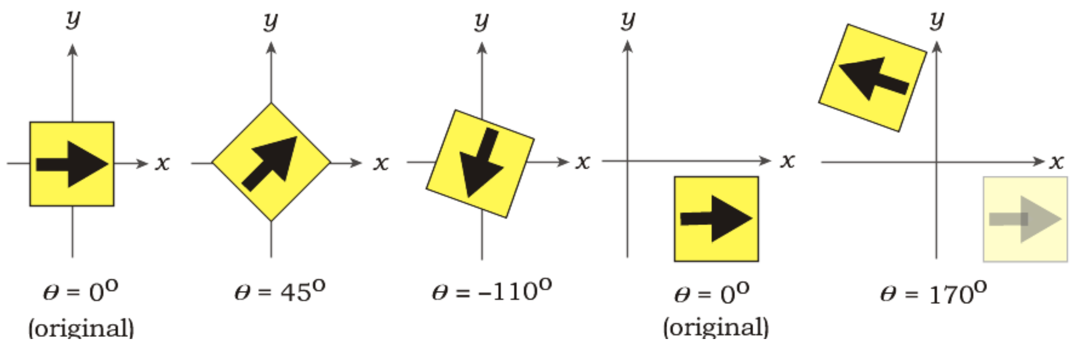
Rotazione (Rotation)

- La matrice di trasformazione $R(\theta)$ che ruota un punto (x,y) nel piano è data da

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

  dove θ è l’angolo di rotazione
- Le coordinate del punto saranno modificate attraverso le seguenti espressioni

$$x' = (\cos\theta)x - (\sin\theta)y$$
$$y' = -(\sin\theta)x + (\cos\theta)y$$



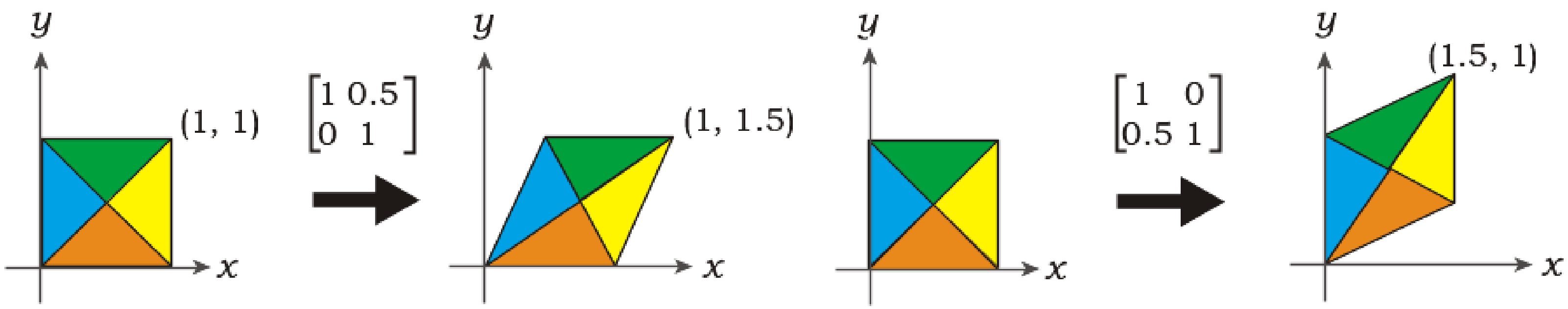
Shearing

- L'operazione di shearing modifica la forma di un oggetto rispetto ad un asse
- La matrice di trasformazione è

$$M(h_{xy}) = \begin{bmatrix} 1 & h_{xy} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Le coordinate dei punti sono modificate nel seguente modo

$$x' = x + h_{xy}$$
$$y' = y$$



Traslazione

- Una operazione di traslazione di un punto (x,y) può essere ottenuta facilmente nel seguente modo

$$x' = x + d_x$$
$$y' = y + d_y$$

- In forma matriciale otteniamo un semplice espressione ma che non utilizza una matrice 2x2

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Concatenazioni di matrici

- Poter disporre di matrici della stessa dimensioni per tutte le trasformazioni permette di concatenare una sequenza di trasformazioni, ovvero

$$\boldsymbol{p'}=T_{\mathrm{n}}T_{\mathrm{n-1}}\ldots T_{1}\boldsymbol{p}=T\boldsymbol{p}$$

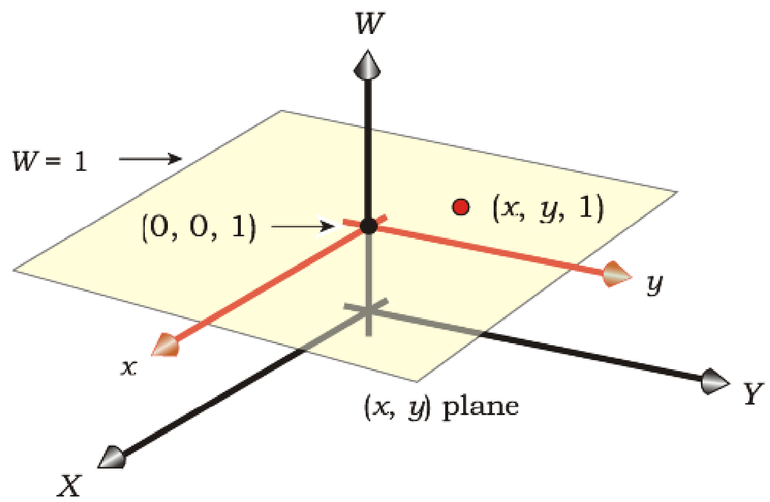
  dove

$$T=T_{\mathrm{n}}T_{\mathrm{n-1}}\ldots T_{1}$$

- Poter disporre di matrici di trasformazioni della stessa dimensione semplifica notevolmente le attività computazionali e di ingegnerizzazione del software per la computer grafica

Coordinate omogenee

- Le coordinate omogenee permettono di descrivere un punto 2D nello spazio 3D e di rappresentare tutte le trasformazioni con matrici 3x3
- Per ogni coordinata (x,y) aggiungiamo una terza componente $w=1$ in modo da ottenere una terna (x,y,w)
- L'idea è di considerare i punti (x,y) "poggiati" sul piano $w=1$



Traslazione con coordinate omogenee

- La matrice di traslazione in coordinate omogenee definita come

$$T(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Applicata ad un punto (x,y,1) otteniamo

$$p' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Altre trasformazioni con coordinate omogenee

$$S(a,b) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M(h_{yx}, h_{xy}) = \begin{bmatrix} 1 & h_{yx} & 0 \\ h_{xy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazioni 3D

- Tutte le trasformazioni 2D possono essere generalizzate nello spazio 3D
- I punti (x,y,z) nello spazio 3D devono essere rappresentati come punti (x,y,z,w) in uno spazio omogeneo 4D con $w=1$
- Le trasformazioni saranno definite attraverso matrici 4X4

Traslazione/Ridimensionamento

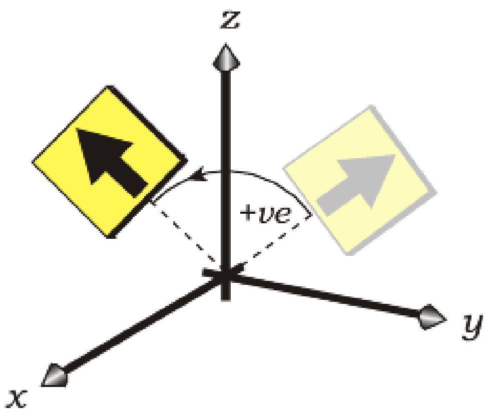
$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

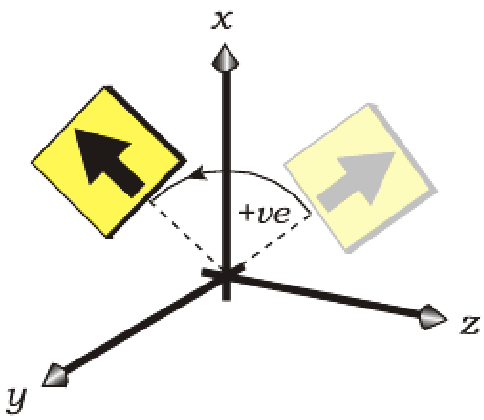
$$S(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

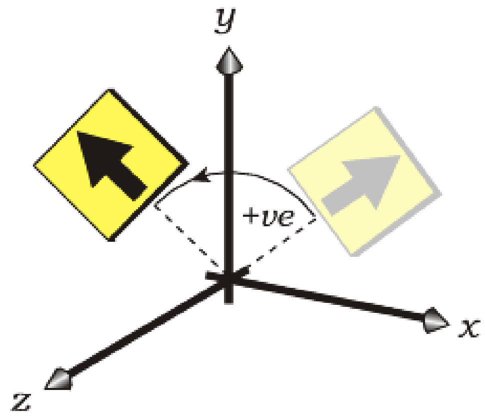
Rotazioni

- Le rotazioni nello spazio possono essere di diverso tipo in base all'asse x,y o z di rotazione

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

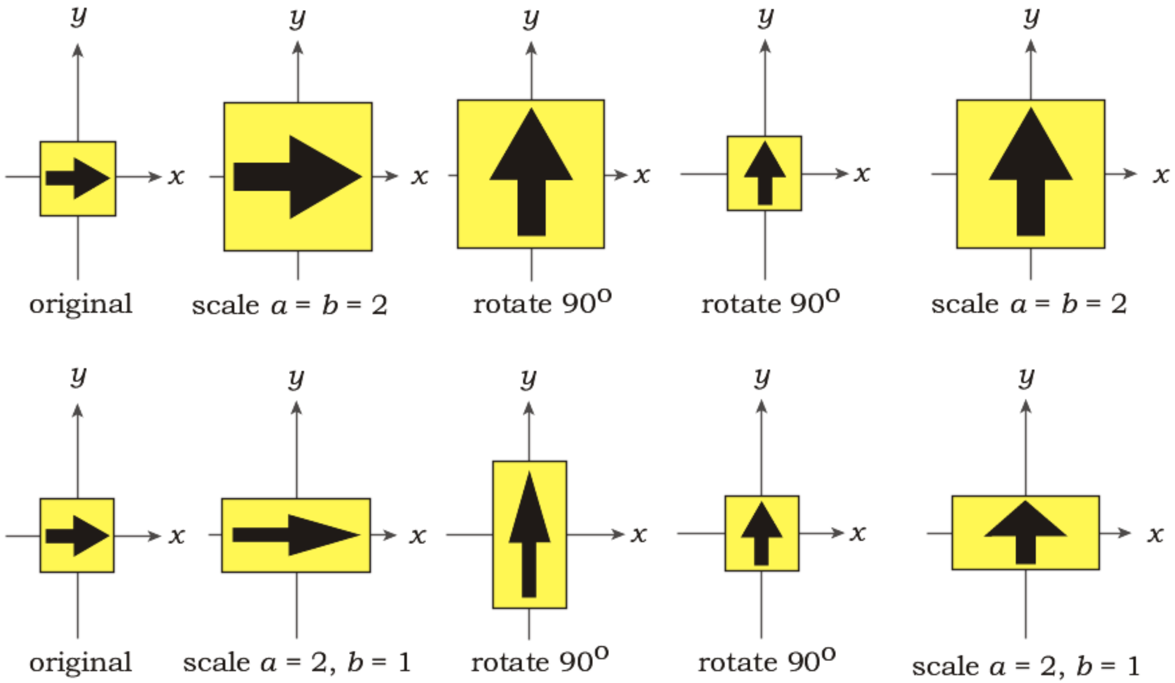






Concatenazioni di trasformazioni

- Una sequenza di trasformazioni su di un oggetto comporta l'applicazione di una serie di moltiplicazioni a catena sui punti dell'oggetto
- L'ordine della sequenza può essere fondamentale!

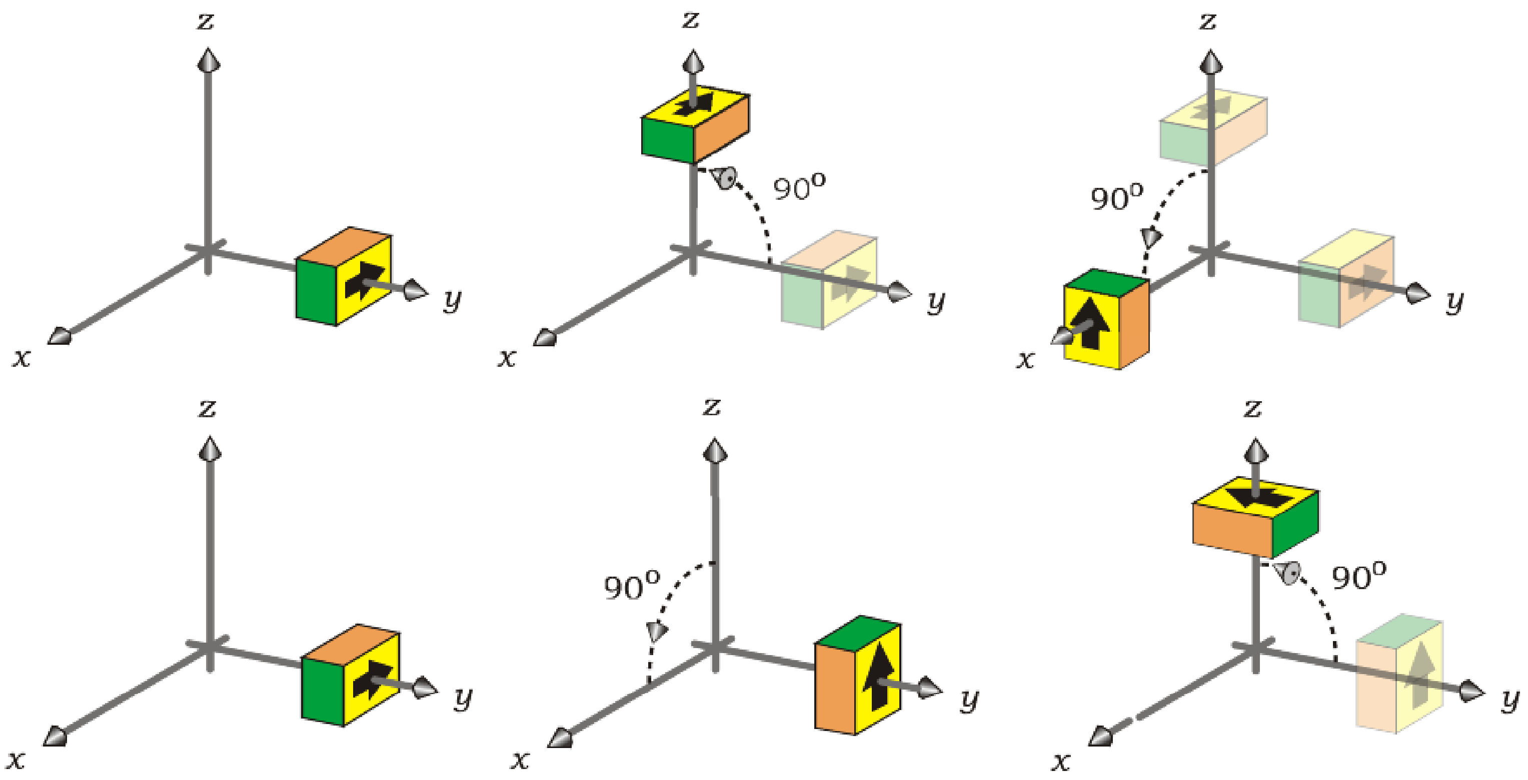


$R(\theta)S(a,a)=S(a,a)\,R(\theta)$

$R(\theta)S(a,b)\neq S(b,a)\,R(\theta)$

Sequenza di rotazioni

- In generale il prodotto di matrici di trasformazioni non è commutativo



$R_x(90°)\ R_y(90°)$

$R_y(90°)R_x(90°)$

Trasformazioni inverse

- Le trasformazioni inverse hanno l'effetto opposto della matrici di trasformazioni
  - L'inversa della matrice di trasformazione che sposta un oggetto di 20 unità sull'asse positivo di x sposta l'oggetto di 20 unità sull'asse negativo di x
- La trasformazione inversa si ottiene considerando la matrice inversa

$$T^{-1}(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & 0 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 & -d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S^{-1}(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1}{}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R^{-1}{}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R^{-1}{}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice inversa

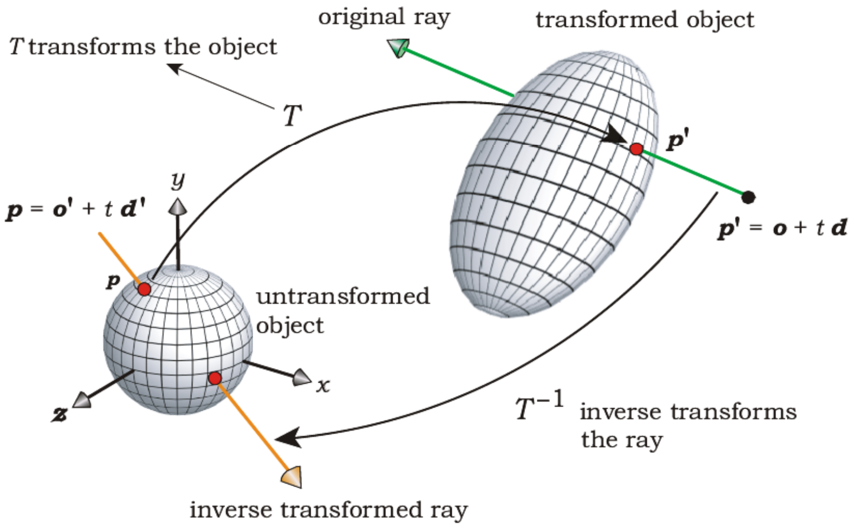
- Per determinare la matrice composta inversa è sufficiente moltiplicare le matrici inverse della composizione, ovvero

$$T^{-1} = T_1^{-1} T_2^{-1} \cdots T_n^{-1}$$

- Le matrici in questo caso sono moltiplicate da destra piuttosto che da sinistra

Intersezioni con oggetti trasformati - 1

- L'intersezione di un raggio con oggetti modellati attraverso trasformazioni affine può essere realizzate nel seguente modo:
  1. Applica la sequenza delle trasformazioni inverse al raggio per ottenere il *raggio trasformato inverso*
  2. Interseca il raggio trasformato inverso all'oggetto non trasformato
  3. Calcola la normale del punto di intersezione sull'oggetto non trasformato
  4. Dal punto di intersezione determina il punto di intersezione originale sull'oggetto trasformato
  5. Determina la normale dell'oggetto trasformato a partire dalla normale dell'oggetto non trasformato



Intersezioni con oggetti trasformati - 2

- Consideriamo un raggio di origine $\boldsymbol{o}$ e direzione $\boldsymbol{d}$ che interseca un oggetto trasformato nel punto $\boldsymbol{p}'$
- Le coordinate del punto $\boldsymbol{p}'$ saranno

$$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{o}+t\boldsymbol{d}$$

  per qualche valore di t
- Il punto $\boldsymbol{p}'$ sull'oggetto non trasformato è trasformato in $\boldsymbol{p}$ attraverso una matrice di trasformazione composta T

$$\boldsymbol{p}'=T\boldsymbol{p}$$

  da cui otteniamo che

$$\boldsymbol{p}=T^{-1}\boldsymbol{p}'$$

Intersezioni con oggetti trasformati - 3

- Applicando T^{-1} all'equazione del raggio otteniamo

$$T^{-1}\boldsymbol{p}' = T^{-1}\boldsymbol{o} + tT^{-1}\boldsymbol{d}$$

da cui

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{o}' + t\boldsymbol{d}'$$

- In definitiva

$$\boldsymbol{o} = T^{-1}\,\boldsymbol{o}$$

$$\boldsymbol{d} = T^{-1}\,\boldsymbol{d}$$

Determinare il punto di intersezione

- Sia $\boldsymbol{p}$ il punto di intersezione sull'oggetto non trasformato
- Per calcolare il punto $\boldsymbol{p'}$ sull'oggetto trasformato dobbiamo determinare il valore t
- Se t_0 è il valore associato al punto $\boldsymbol{p}$ allora $t = t_0$, infatti se sostituiamo t_0 in

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{o}' + t_0 \boldsymbol{d}' = T^{-1}\boldsymbol{o} + t_0 T^{-1}\boldsymbol{d}$$

moltiplichiamo entrambe le equazioni per T

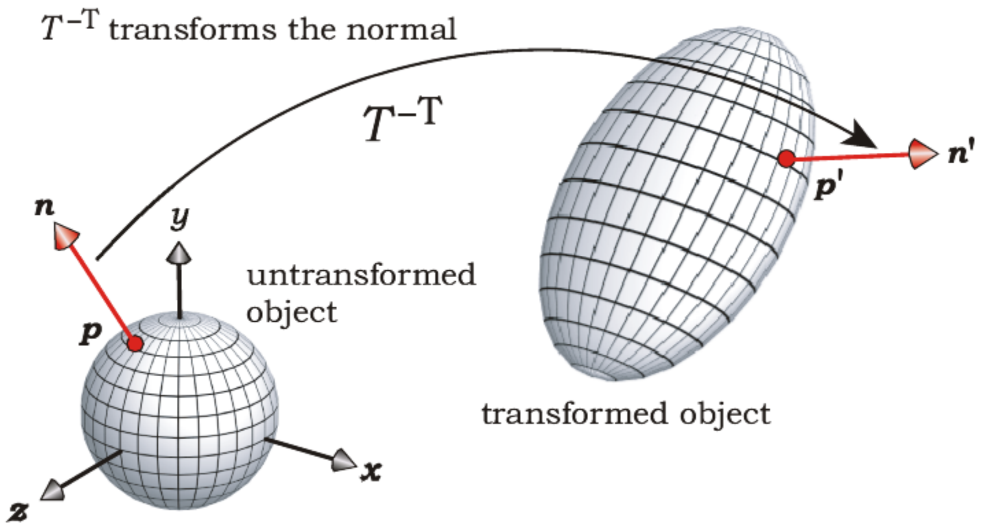
$$T\boldsymbol{p} = TT^{-1}\boldsymbol{o} + t_0 TT^{-1}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{o} + t_0 \boldsymbol{d} = \boldsymbol{p'}$$

Trasformata la normale

- La normale determinata sull'oggetto non trasformato deve essere utilizzata per calcolare la normale sull'oggetto trasformato
- Non esiste una relazione semplice tra la normale e la matrice di trasformazione T
- Se $\boldsymbol{n}$ è la normale dell'oggetto non trasformato la normale dell'oggetto trasformato sarà

$$\boldsymbol{n}' = T^{-T}\boldsymbol{n}$$

dove $T^{-T} = (T^{-1})^{T}$ è la *trasposta* della matrice inversa T



Instacing

- L'*instacing* è una tecnica che permette di renderizzare più istanze dello stesso oggetto presente all'interno della scena evitando di duplicare l'oggetto stesso
- L'idea consiste nel mantenere una sola copia della geometria dell'oggetto è costruire delle istanze per ogni copia presente all'interno della scena con matrici di trasformazioni e materiali distinti