Dispense per il corso di Analisi 4

Sandra Saliani

Anno Accademico
2008-2009

Indice

Capitolo 1

Superfici

1.1 Superfici regolari

In analogia con la definizione di curva in $\mathbb{R}^n$ diamo la definizione di superficie

Definizione 1.1 *Sia* $A \subset \mathbb{R}^2$ *un aperto connesso, sia* $T \subset \mathbb{R}^2$ *tale che* $A \subset T \subset \overline{A}$ *(da cui* $A = \overset{\circ}{T}$*). Una superficie regolare di classe* C^1 *è una coppia* (r, Σ) *dove*

1. $r : T \to \mathbb{R}^3$, $r(T) = \Sigma$

2. $r \in C^1(\overset{\circ}{T})$

3. *per ogni* $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{T}$*, se* $r(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$*, la matrice*

$$J_r(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} r_{1u}(u_0, v_0) & r_{2u}(u_0, v_0) & r_{3u}(u_0, v_0) \\ r_{1v}(u_0, v_0) & r_{2v}(u_0, v_0) & r_{3v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

ha rango 2.
La superficie si dice semplice se $r : \overset{\circ}{T} \to \mathbb{R}^3$ *è iniettiva.*

La funzione r prende il nome di parametrizzazione di Σ. Talvolta con abuso di linguaggio si dirà "la superficie Σ di parametrizzazione r" per indicare la coppia (r, Σ).

Osservazione 1.2 *Rientrano nella definizione di superficie regolare tutti i grafici di funzioni* $f : T \to \mathbb{R}$*, con* $f \in C^1$*. Infatti una parametrizzazione è* *data da $r(x,y) = (x, y, f(x,y))$. In tal caso la matrice (1.1) si riduce in ogni punto (x,y) a*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & f_x(x,y) \\ 0 & 1 & f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

il cui terzo minore è sempre diverso da zero.

Sia (r, Σ) una superficie regolare di classe C^1, $r = (r_1, r_2, r_3)$. Allora, per ogni punto $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{T}$, almeno uno dei tre determinanti seguenti è diverso da zero

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} r_{2u}(u_0,v_0) & r_{3u}(u_0,v_0) \\ r_{2v}(u_0,v_0) & r_{3v}(u_0,v_0) \end{vmatrix} &= \frac{\partial(r_2, r_3)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0) \\ &= r_{2u}(u_0,v_0) r_{3v}(u_0,v_0) - r_{2v}(u_0,v_0) r_{3u}(u_0,v_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} r_{3u}(u_0,v_0) & r_{1u}(u_0,v_0) \\ r_{3v}(u_0,v_0) & r_{1v}(u_0,v_0) \end{vmatrix} &= \frac{\partial(r_3, r_1)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0) \\ &= r_{3u}(u_0,v_0) r_{1v}(u_0,v_0) - r_{1u}(u_0,v_0) r_{3v}(u_0,v_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} r_{1u}(u_0,v_0) & r_{2u}(u_0,v_0) \\ r_{1v}(u_0,v_0) & r_{2v}(u_0,v_0) \end{vmatrix} &= \frac{\partial(r_1, r_2)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0) \\ &= r_{1u}(u_0,v_0) r_{2v}(u_0,v_0) - r_{2u}(u_0,v_0) r_{1v}(u_0,v_0). \end{aligned}$$

Si osservi che queste quantità sono esattamente le componenti del vettore

$$r_u(u_0,v_0) \wedge r_v(u_0,v_0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_{1u}(u_0,v_0) & r_{2u}(u_0,v_0) & r_{3u}(u_0,v_0) \\ r_{1v}(u_0,v_0) & r_{2v}(u_0,v_0) & r_{3v}(u_0,v_0) \end{vmatrix}.$$

Quindi per una superficie regolare si ha $r_u(u_0,v_0) \wedge r_v(u_0,v_0) \neq 0$ o, equivalentemente, i vettori $r_u(u_0,v_0)$ e $r_v(u_0,v_0)$ sono linearmente indipendenti.

Definizione 1.3 *Sia (r, Σ) una superficie regolare e sia $\tilde{r}$ un'altra parametrizzazione di Σ. $r : T \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{r} : S \to \mathbb{R}^3$, dove $T, S \subset \mathbb{R}^2$. Diremo che r e $\tilde{r}$ sono equivalenti se esiste un'applicazione $\phi : S \to T$, $\phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ di classe $C^1(\overset{\circ}{S})$, biettiva e tale che, per ogni $(x,y) \in \overset{\circ}{S}$, $\det J_\Phi(x,y) > 0$ e $\tilde{r} = r \circ \Phi$.*

Se $r = (r_1, r_2, r_2)$ e $\tilde{r} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_2)$ sono equivalenti, allora

$$\tilde{r}_i(x, y) = r_i(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)), \quad i = 1, 2, 3.$$

Passando al calcolo delle derivate parziali, per il Teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$\tilde{r}_{ix}(x, y) = r_{iu}(\Phi(x, y))\varphi_{1x}(x, y) + r_{iv}(\Phi(x, y))\varphi_{2x}(x, y), \quad i = 1, 2, 3,$$

e

$$\tilde{r}_{iy}(x, y) = r_{iu}(\Phi(x, y))\varphi_{1y}(x, y) + r_{iv}(\Phi(x, y))\varphi_{2y}(x, y), \quad i = 1, 2, 3,$$

Da cui, in forma vettoriale,

$$\tilde{r}_x(x, y) = r_u(\Phi(x, y))\varphi_{1x}(x, y) + r_v(\Phi(x, y))\varphi_{2x}(x, y),$$

$$\tilde{r}_y(x, y) = r_u(\Phi(x, y))\varphi_{1y}(x, y) + r_v(\Phi(x, y))\varphi_{2y}(x, y).$$

Allora, per le proprietà del prodotto vettoriale

$$\begin{aligned}
& \tilde{r}_x(x, y) \wedge \tilde{r}_y(x, y) \\
= \;& (r_u(\Phi(x, y))\varphi_{1x}(x, y) + r_v(\Phi(x, y))\varphi_{2x}(x, y)) \wedge \big(r_u(\Phi(x, y))\varphi_{1y}(x, y) + r_v(\Phi(x, y))\varphi_{2y}(x, y)\big) \\
= \;& \big(\varphi_{1x}(x, y)\varphi_{2y}(x, y) - \varphi_{1y}(x, y)\varphi_{2x}(x, y)\big)\, r_u(\Phi(x, y)) \wedge r_v(\Phi(x, y)) \\
= \;& \det J_\Phi(x, y) r_u(\Phi(x, y)) \wedge r_v(\Phi(x, y)).
\end{aligned}$$

In definitiva, i vettori $\tilde{r}_x(x, y) \wedge \tilde{r}_y(x, y)$ e $r_u(\Phi(x, y)) \wedge r_v(\Phi(x, y))$ hanno stessa direzione e verso.

Una superficie regolare semplice può essere vista, localmente, come un aperto di $\mathbb{R}^2$. La seguente proposizione, che porta alla generalizzazione del concetto di superficie (e di curva) a dimensioni arbitrarie, realizza una superficie, localmente, come il grafico di una funzione oppure come l'insieme degli zeri di un'opportuna funzione a gradiente non nullo. Esso si dimostra con l'applicazione del Teorema di Dini sulle funzioni implicite e del Teorema di inversione locale.

Teorema 1.4 *Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

a) Per ogni $P_0 \in \Sigma$, esiste un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ un'applicazione $r : A \to \mathbb{R}^3$ iniettiva e di classe C^1 ed un intorno U di P_0 tale che $r(A) = \Sigma \cap U$ ed il rango della matrice $J_r(P)$ sia 2 per ogni $p \in A$.

b) Per ogni $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ esistono un intorno aperto V del punto (x_0, y_0), ed un intorno aperto W di z_0, un'applicazione $h : V \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che, posto $\Omega = V \times W$, si abbia

$$\Sigma \cap \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in V,\ h(x, y) = z\},$$

a meno delle permutazioni delle variaili (x, y, z).

c) Per ogni $P_0 \in \Sigma$ esiste un intorno U di P_0, un'applicazione $g : U \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\Sigma \cap U = \{P \in U \mid g(P) = 0\}$ e $\nabla g(P) \neq 0$ per ogni $p \in \Sigma \cap U$.

Esempio 1.5 La superficie sferica di equazione

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

dove $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq 0$ in ogni punto della sfera, ha parametrizzazione

$$r : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \quad r(\theta, \psi) = (R\cos\theta \sin\psi, R\sin\theta\sin\psi, R\cos\psi).$$

La matrice Jacobiana di r è

$$\begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\psi & R\cos\theta\sin\psi & 0) \\ R\cos\theta\cos\psi & R\sin\theta\cos\psi & -R\sin\psi \end{pmatrix}$$

che ha rango 2.

Si osservi che è possibile esplicitare localmente una variabile in funzione delle altre due estraendo la radice quadrata. Ad esempio, i punti dell'emisfero inferiore sono sul grafico della funzione $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

1.2 Piano tangente

In questo paragrafo supponiamo di avere una superficie regolare semplice (r, Σ), r definita su T aperto. Sia $\rho : I \to \mathbb{R}^2$, $\rho(I) = \gamma \subset T$ una curva regolare contenuta in T, $\rho(t) = (u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ intervallo.

Sia $\tilde{\rho} : I \to \mathbb{R}^3$ definita tramite $\tilde{\rho} = r \circ \rho$, allora

$$\tilde{\rho}\,'(t) = r_u(\rho(t))u'(t) + r_v(\rho(t))v'(t), \tag{1.2}$$

e $\tilde{\rho}$ è ancora una curva regolare con $\tilde{\rho}(I) = \tilde{\gamma} \subset \Sigma$. Da (1.2) otteniamo che il vettore tangente a $\tilde{\rho}$ è contenuto nel piano individuato dai due vettori r_u e r_v.

Viceversa, sia $P_0 = r(u_0, v_0) \in \Sigma$ e sia $\tilde{\rho}(t) = (u(t), v(t), w(t))$ una curva regolare con $P_0 \in \tilde{\rho}(I) = \tilde{\gamma} \subset \Sigma$. Dalla b) del Teorema 1.4, otteniamo che Σ è , localmente, il grafico di una funzione di classe C^1, quindi esistono un aperto $V \subset \mathbb{R}^2$ ed un intorno aperto Ω di P_0, un'applicazione $h : V \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che

$$\Sigma \cap \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in V,\ h(x, y) = z\}.$$

Considerato un intervallo aperto $\tilde{I} \subset I \cap \tilde{\rho}^{-1}(\Omega)$, si ha per $t \in \tilde{I}$,

$$\tilde{\rho}(t) \in \tilde{\gamma} \cap \Omega \subset \Sigma \cap \Omega = \mathcal{G}_h = \text{grafico di h},$$

quindi

$$\tilde{\rho}(t) = (u(t), v(t), h(u(t), v(t)).$$

Considerato poi un aperto $\tilde{T} \subset T \cap r^{-1}(\Omega)$, si ha che per $(u, v) \in \tilde{T}$, $r(u, v) \in \Sigma \cap \Omega = \mathcal{G}_h$, ovvero $r(u, v) = (u, v, h(u, v))$. In definitiva si ha in $\tilde{I}$, $\tilde{\rho} = r \circ \rho$, dove $\rho(t) = (u(t), v(t))$ e ancora

$$\tilde{\rho}\,'(t) = r_u(\rho(t))u'(t) + r_v(\rho(t))v'(t).$$

Possiamo riassumere quanto detto finora come segue: assegnata una parametrizzazione r di Σ, il piano individuato dai vettori $r_u(u_0, v_0)$ e $r_v(u_0, v_0)$ contiene tutti i vettori tangenti ad ogni curva passante per $P_0 = r(u_0, v_0)$ e contenuta in Σ. Esso prende il nome di "piano tangente" a Σ in P_0. Esso è invariante per parametrizzazioni equivalenti.

Cerchiamo di determinare l'equazione del piano tangente.
Se $P_0 = r(u_0, v_0)$, il vettore $r_u(u_0, v_0) \wedge r_v(u_0, v_0)$ è ortogonale ai vettori

$r_u(u_0, v_0)$ e $r_v(u_0, v_0)$, quindi, per ogni punto $P = (x, y, z)$ del piano tangente, al vettore $P - P_0$, ossia il prodotto scalare

$$< P - P_0, r_u(u_0, v_0) \wedge r_v(u_0, v_0) >= 0,$$

o, equivalentemente,

$$\det \begin{pmatrix} x - r_1(u_0, v_0) & y - r_2(u_0, v_0) & z - r_3(u_0, v_0) \\ r_{1u}(u_0, v_0) & r_{2u}(u_0, v_0) & r_{3u}(u_0, v_0) \\ r_{1v}(u_0, v_0) & r_{2v}(u_0, v_0) & r_{3v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = 0.$$

Il vettore $r_u(u_0, v_0) \wedge r_v(u_0, v_0)$ prende il nome di vettore normale alla superficie (in P_0, anche se è "puntato" nell'origine). Il versore corrispondente viene indicato con

$$n = \frac{r_u \wedge r_v}{\|r_u \wedge r_v\|}.$$

Insieme ad n si può considerare anche $-n$. La scelta di quale versore scegliere è legata al concetto di orientazione di una superficie. La nozione di orientazione si può formalizzare in modo preciso, per semplicità preferiamo darla in modo più intuitivo.

Definizione 1.6 *Sia (r, Σ) una superficie regolare, diremo che Σ è una superficie orientabile se, partendo da un qualunque punto $P \in \Sigma$ e seguendo una* **qualunque curva regolare chiusa sulla superficie, il versore normale vari con continuità e ritorni nella sua posizione iniziale.**

La scelta del versore normale determina l'orientazione dellla superficie.

Un esempio di superficie non orientabile: nastro di Möbius.

Esempio 1.7 Cilindro in $\mathbb{R}^3$.
Se $R > 0$, la superficie individuata da $x^2 + y^2 = R^2$ ha rappresentazione parametrica

$$r : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad r(\theta, t) = (R\cos\theta, R\sin\theta, t).$$

Si ha

$$r_\theta(\theta, t) \wedge r_t(\theta, t) = \begin{pmatrix} -R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ora è sempre $(\sin\theta, \cos\theta) \neq 0$, quindi il rango della matrice è sempre 2.

Calcoliamo l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto $(0, R, 1)$, corrispondente a $(\pi/2, 1)$.

$$\det \begin{pmatrix} x-0 & y-R & z-1 \\ -R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R(y-R) = 0,$$

da cui $y = R$.

In alternativa, si osservi che in un intorno del punto $(0, R, 1)$, possiamo descrivere il cilindro come grafico della funzione $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R < x < R$. Questo caso è descritto in tutta generalità nell'osservazione seguente.

Osservazione 1.8 Se in un intorno del punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ la superficie si può descrivere come una funzione esplicita di due variabili, ad esempio $y = g(x, z)$, considerata la parametrizzazione

$$r(x, z) = (x, f(x, z), z),$$

l'equazione del piano tangente è

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & f_x(x_0, y_0, z_0) & 0 \\ 0 & f_z(x_0, y_0, z_0) & 1 \end{pmatrix} \\ = \quad & f_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) - (y-y_0) = 0, \end{aligned}$$

da cui

$$y = y_0 + f_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0).$$

1.3 Area di una superficie

Si potrebbe dare una definizione di area di una superficie seguendo la falsariga di ciò che si è fatto per la lunghezza di una curva: corrispondentemente alla "linea spezzata" che approssima la lunghezza, si può considerare una sorta di "triangolazione" della superficie. Si vede facilmente che questo metodo non funziona. Infatti ad una partizione dell' intervallo, in cui è definita la curva, non corrisponde, in generale, una possibile decomposizione dell'aperto connesso in $\mathbb{R}^2$ (in triangoli o, in generale, in poligoni) il cui "poliedro" inscritto nella superficie sia "adagiato" su di essa.

Per giustificare la definizione che daremo di area di una superficie, ricorriamo ad un ragionamento euristico, la cui formalizzazione risulta essere abbastanza complessa.

Supponiamo che (r, Σ) sia una superficie regolare, $r : T \to \mathbb{R}^3$, $T \subset \mathbb{R}^2$ aperto. Per $\varepsilon > 0$ costruiamo uno strato Ω_ε intorno alla superficie descritto dall'applicazione

$$r_\varepsilon : T \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3, \quad r_\varepsilon(u, v, s) = r(u, v) + \varepsilon s\, n(u, v),$$

dove $n(u, v)$ è il versore normale alla superficie in $r(u, v)$. Si osservi che lo strato $\Omega_\varepsilon = r_\varepsilon(T \times (-1, 1)) \subset \mathbb{R}^3$ ha altezza 2ε.

Appare naturale definire

$$Area(\Sigma) = \int_\Sigma = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} 1\, dx,$$

dove il termine a destra è un integrale triplo.

Ipotizzando di poter applicare il teorema di cambiamento di variabile e di poter passare il limite sotto il segno di integrale, utilizzando la sostituzione $x = r_\varepsilon(u, v, s)$, si ha

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} 1\, dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{T \times (-1,1)} |\det J_{r_\varepsilon}(u, v, s)| \;\; du\, dv\, ds.$$

Calcoliamo lo Jacobiano:

$$r_\varepsilon(u, v, s) = (r_1(u, v) + \varepsilon s\, n_1(u, v), r_2(u, v) + \varepsilon s\, n_2(u, v), r_3(u, v) + \varepsilon s\, n_3(u, v)),$$

quindi

$$\begin{aligned}
(r_\varepsilon)_u(u, v, s) &= r_u(u, v) + \varepsilon s\, n_u(u, v), \\
(r_\varepsilon)_v(u, v, s) &= r_v(u, v) + \varepsilon s\, n_v(u, v), \\
(r_\varepsilon)_s(u, v, s) &= \varepsilon\, n(u, v).
\end{aligned}$$

Allora, nel punto (u, v, s), (le componenti di r e d n sono calcolate in (u, v))

$$J_{r_\varepsilon}(u, v, s) = \begin{pmatrix} (r_1)_u + \varepsilon s\, (n_1)_u & (r_2)_u + \varepsilon s\, (n_2)_u & (r_3)_u + \varepsilon s\, (n_3)_u \\ (r_1)_v + \varepsilon s\, (n_1)_v & (r_2)_v + \varepsilon s\, (n_2)_v & (r_3)_v + \varepsilon s\, (n_3)_v \\ \varepsilon\, n_1 & \varepsilon\, n_2 & \varepsilon\, n_3 \end{pmatrix},$$

quindi

$$\det J_{r_\varepsilon}(u,v,s) = \varepsilon \det \begin{pmatrix} (r_1)_u & (r_2)_u & (r_3)_u \\ (r_1)_v & (r_2)_v & (r_3)_v \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} + o(\varepsilon).$$

Se è lecito passare il limite sotto il segno di integrale,

$$\begin{aligned} Area\Sigma &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{T\times(-1,1)} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mid \det \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ n \end{pmatrix} + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \mid du\, dv\, ds \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-1}^{1} \int_T \mid \det \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ n \end{pmatrix} \mid du\, dv\, ds \\ &= \int_T \mid (r_u \wedge r_v) \cdot n \mid du\, dv. \end{aligned}$$

Ora $n(u,v)$ è il versore normale alla superficie in $r(u,v)$ ed è pari a

$$n = \frac{r_u \wedge r_v}{\|r_u \wedge r_v\|}.$$

Quindi

$$\mid (r_u \wedge r_v) \cdot n \mid = \|r_u \wedge r_v\|.$$

Allora

$$Area\Sigma = \int_T \|r_u(u,v) \wedge r_v(u,v)\|\, du\, dv.$$

Definizione 1.9 *Supponiamo che (r,Σ) sia una superficie regolare,$T \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $r : T \to \mathbb{R}^3$. Si definisce area della superficie Σ la quantità*

$$Area\Sigma = \int\int_T \|r_u(u,v) \wedge r_v(u,v)\|\, du\, dv.$$

Un ragionamento analogo porta alla definizione di integrale superficiale.

Definizione 1.10 *Supponiamo che (r,Σ) sia una superficie regolare, $T \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $r : T \to \mathbb{R}^3$. Sia $f : \Sigma \to \mathbb{R}$, si definisce integrale superficiale di f su Σ la quantità*

$$\int_\Sigma f\, d\sigma = \int\int_T f(r(u,v))\|r_u(u,v) \wedge r_v(u,v)\|\, du\, dv.$$

ogni volta che l'integrale a destra è ben definito.

La definizione di integrale superficiale è ben posta, in quanto si mostra facilmente che è invariante per parametrizzazioni equivalenti.

Infatti Sia (r, Σ) una superficie regolare e sia $\tilde{r}$ un'altra parametrizzazione di Σ equivalente a r. $r : T \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{r} : S \to \mathbb{R}^3$, dove $T, S \subset \mathbb{R}^2$. Allora esiste un'applicazione $\phi : S \to T$, $\phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ di classe $C^1(\overset{\circ}{S})$, biettiva e tale che, per ogni $(x, y) \in \overset{\circ}{S}$, $\det J_\Phi(x, y) > 0$ e $\tilde{r} = r \circ \Phi$. Ricordiamo che vale

$$\tilde{r}_x(x, y) \wedge \tilde{r}_y(x, y) = \det J_\Phi(x, y) r_u(\Phi(x, y)) \wedge r_v(\Phi(x, y)).$$

Quindi, effettuando il cambio di variabili $u = \varphi_1(x, y), v = \varphi_2(x, y)$,

$$\begin{aligned} & \iint_T f(r(u, v)) \|r_u(u, v) \wedge r_v(u, v)\| \, du \, dv \\ = & \iint_T f(\tilde{r}_x(x, y)) \|r_u(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) \wedge r_v(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))\| \det J_\Phi(x, y) \, dx \, dy \\ = & \iint_T f(\tilde{r}_x(x, y)) \|\tilde{r}_x(x, y) \wedge \tilde{r}_y(x, y)\| \, dx \, dy, \end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare. $\square$

1.4 Il Teorema della divergenza

L'argomento di cui ci occupiamo in questo paragrafo è il seguente. Se $f \in C^1([a, b])$, il Teorema fondamentale del calcolo integrale afferma:

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a).$$

Vogliamo capire se è possibile estendere questa formula ad integrali multipli, curvilinei o superficiali. Ovviamente si avrà bisogno di un altro tipo di derivata, di dominio che sostituisca l'intervallo $[a, b]$ e di un altro tipo di orientamento per il dominio.

A titolo di esempio, consideriamo $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$, e $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$. Facendo variare $x \in [a, b]$ e fissando y e z, otteniamo

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \, dx = f(b, y, z) - f(a, y, z).$$

Se R è un rettangolo in $\mathbb{R}^2$, integrando ulteriormente

$$\int_R \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_R f(b,y,z) - f(a,y,z)\, dy\, dz,$$

e quindi il calcolo di un integrale in 3 dimensioni è ridotto al calcolo di un integrale a 2 dimensioni.

Proveremo formule simili nei seguenti teoremi:

1. Il Teorema della divergenza (o di Gauss- Green), per $n = 2$ ci sarà la corrispondenza di un integrale doppio con un integrale curvilineo; per $n = 3$ ci sarà la corrispondenza di un integrale triplo con un integrale superficiale.

2. Il Teorema di Stokes, per $n = 3$ ci sarà la corrispondenza di un integrale superficiale con un integrale curvilineo.

Abbiamo la necessità di introdurre il concetto di bordo di un insieme, che non sempre coincide con il concetto di frontiera (si pensi ad una superficie). Inoltre il bordo deve essere abbastanza "buono" perchè si possa considerare un integrale su di esso.

Ciò conduce al concetto di aperto regolare.

Definizione 1.11 *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Diremo che A è un aperto regolare di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ se, per ogni x_0 appartenente alla frontiera ∂A di A*[1]*, esiste un intorno I di x_0, un intorno W dell'origine in $\mathbb{R}^n$ ed una funzione biiettiva $\varphi : W \to I$, $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1$ tali che*

1. $I \cap A = \varphi(W \cap \mathbb{R}^n_+)$,

2. $I \cap \partial A = \varphi(W \cap \partial\mathbb{R}^n_+)$,

3. $I \setminus \overline{A} = \varphi(W \setminus \overline{\mathbb{R}^n_+})$.

La frontiera di un aperto regolare si chiama bordo di A.

Vale il seguente risultato che enunciamo senza dimostrazione e che individua il bordo di un aperto regolare localmente come l'insieme degli zeri di una funzione di classe C^1.

[1]ricordiamo che $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{C}(A)} = \mathcal{C}(\mathring{A} \cup \mathcal{C}(\mathring{A}))$

Teorema 1.12 *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato.*

A è un aperto regolare di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ se e solo se per ogni $x_0 \in \partial A$, esiste un intorno I di x_0, ed una funzione $g : I \to \mathbb{R}$, $g \in C^1(I)$, tale che per ogni $x \in \partial A \cap I$ si abbia $\nabla g(x) \neq 0$ e

1. $I \cap A = \{x \in I \mid g(x) < 0\}$,

2. $I \cap \partial A = \{x \in I \mid g(x) = 0\}$,

3. $I \setminus \overline{A} = \{x \in I \mid g(x) > 0\}$.

Osservazione 1.13 Dal Teorema precedente segue che, se A è un aperto regolare, la sua frontiera è una curva regolare nel caso $n = 2$ o una superficie regolare nel caso $n = 3$. Il versore

$$\nu(x) = \frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|}, \quad x \in \partial A,$$

non dipende dalla scelta di g ed è normale alla frontiera, diretto verso l'esterno. Esso si chiama versore normale esterno a ∂A in x.

Un'altra caratterizzazione degli aperti regolari è fornita nel seguente Teorema

Teorema 1.14 *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato.*

A è un aperto regolare di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ se e solo se per ogni $x_0 \in \partial A$, esiste un intorno I di x_0, un indice $i = 1, \dots, n$, un aperto $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ed una funzione $h : U \to \mathbb{R}$, $h \in C^1(U)$, tale che denotati i punti di $\mathbb{R}^n$ nella forma $x = (x', x_i)$ si abbia

1) $I \cap A = \{(x', x_i) \in \mathbb{R}^n \mid x' \in U,\ h(x') < x_i\}$,

2) $I \cap \partial A = \{(x', x_i) \in \mathbb{R}^n \mid x' \in U,\ h(x') = x_i\}$,

oppure

3) $I \cap A = \{(x', x_i) \in \mathbb{R}^n \mid x' \in U,\ h(x') > x_i\}$,

4) $I \cap \partial A = \{(x', x_i) \in \mathbb{R}^n \mid x' \in U,\ h(x') = x_i\}$.

Volendo calcolare la normale esterna al bordo di A, utilizzando quest'ultima caratterizzazione, nal primo caso possiamo prendere

$$g(x) = g(x', x_i) = h(x') - x_i,$$

da cui

$$\nabla g(x) = (h_{x_1}, \ldots, -1, \ldots, h_{x_n}),$$

e

$$\nu(x) = \frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|} = \frac{(h_{x_1}, \ldots, -1, \ldots, h_{x_n})}{\sqrt{h_{x_1}^2 + \cdots + 1 + \cdots + h_{x_n}^2}}.$$

Nel secondo caso

$$g(x) = g(x', x_i) = x_i - h(x'),$$

da cui

$$\nabla g(x) = (-h_{x_1}, \ldots, 1, \ldots, -h_{x_n}),$$

e

$$\nu(x) = \frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|} = \frac{(-h_{x_1}, \ldots, 1, \ldots, -h_{x_n})}{\sqrt{h_{x_1}^2 + \cdots + 1 + \cdots + h_{x_n}^2}}.$$

Definizione 1.15 *Sia $B \subset \mathbb{R}^n$, ed $f : B \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(B)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, un campo vettoriale. La funzione*

$$\mathrm{div} f : B \to \mathbb{R},$$

$$\mathrm{div} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x),$$

si chiama divergenza di f.

Teorema 1.16 *(Teorema della divergenza) Sia A un aperto regolare di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$. Sia $B \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{A} \subset B$, ed $f : B \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(B)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, un campo vettoriale. Allora*

$$\int_A \mathrm{div} f(x)\, dx = \int_{\partial A} f \cdot \nu \, d\sigma. \tag{1.3}$$

Si osservi che l'integrale a destra in (1.3) è un integrale curvilineo per $n = 2$ e superficiale per $n = 3$.

Prima di procedere alla dimostrazione osserviamo quanto segue. Se $n = 2$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è la normale esterna alla curva regolare ∂A, il vettore $\tau =$

$(-\nu_2, \nu_1)$ è ortogonale a ν ed è dunque tangente alla curva ∂A, esso determina l'orientamento positivo di ∂A (punti di A a sinistra) che verrà indicata con $\partial^+ A$.

Applicando il Teorema della divergenza alla funzione $(f_2, -f_1)$ si ottiene:

Corollario 1.17 *(n=2)(Formule di Gauss-Green) Sia A un aperto regolare di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Sia $B \subset \mathbb{R}^2$, $\overline{A} \subset B$, ed $f : B \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(B)$, $f = (f_1, f_2)$, un campo vettoriale. Allora*

$$\int\int_A \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial A} f \cdot \tau\, ds = \int_{\partial A} \omega, \tag{1.4}$$

dove l'integrale a destra di (1.4) è l'integrale curvilineo della forma differenziale definita da $\omega(x,y) = f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$,

Osservazione 1.18 *Il Teorema della divergenza continua a valere anche quando la frontiera di A è una curva (o una superficie) regolare a tratti, in particolare se A è un poligono o, in tre dimensioni, un poliedro.*

Un'altra applicazione del Teorema di Gauss-Green riguarda il calcolo delle aree degli aperti regolari.

Corollario 1.19 *Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto regolare. Allora*

$$\text{Area}\, A = -\int_{\partial A} y\, dx = \int_{\partial A} x\, dy = \frac{1}{2}\left(\int_{\partial A} -y\, dx + x\, dy\right).$$

Dim.

Definiamo $f : \overline{A} \to \mathbb{R}^2$ tramite $f(x,y) = (y, 0)$. Allora, per la (1.4) del corollario precedente

$$\text{Area}\, A = \int_A 1\, dx = -\int_A \frac{\partial y}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\partial A} (y,0)\cdot(\tau_1, \tau_2)\, ds.$$

Ora ricordiamo che ∂A è una curva regolare e che se $r : I \to \mathbb{R}^2$ è una sua parametrizzazione ($I \subset \mathbb{R}$), il versore tangente è pari a

$$\tau(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}.$$

Se consideriamo la forma differenziale $\omega(x,y) = y\,dx + 0\,dy$, l'integrale a destra non è altro che

$$\int_{\partial A} (y,0)\cdot(\tau_1,\tau_2)\ ds = \int_{\partial A} \omega = \int_{\partial A} Y\ dx.$$

Analogamente si prova l'altra, partendo da $g : \overline{A} \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (0,x)$. L'ultima uguaglianza si ottiene sommando le due precedentemente ottenute e dividendo per 2. $\square$

Passiamo alla dimostrazione del Teorema, nel caso $n = 2$. Premettiamo due Lemmi.

Lemma 1.20 *Sia $f : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^1((a,b)\times(a,b))$, e*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)\neq 0\}} \subset (a,b)\times(a,b) = R.$$

Allora,

$$\int\int_R \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ dx\ dy = \int\int_R \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ dx\ dy = 0.$$

Dim.

$$\begin{aligned}\int\int_R \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ dx\ dy &= \int_a^b \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ dx\right)\ dy \\ &= \int_a^b f(b,y) - f(a,y)\ dy \\ &= 0,\end{aligned}$$

perchè $(a,y),(b,y) \notin \operatorname{supp} f$. Stesso procedimento per l'altra. $\square$

Lemma 1.21 *Sia A un aperto regolare di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Sia $(x_0,y_0)\in A$ ed I intorno di (x_0,y_0) come previsto nel Teorema 1.14.*
Si può assumere che I sia un quadrato aperto di centro (x_0,y_0) e raggio r,

$I = (x_0 - r, x_0 + r) \times (y_0 - r, y_0 + r)$. Sia $f : \overline{I} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\mathrm{supp} f \subset I$. Allora

$$\int\int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial A} f \nu_2\, ds,$$

e

$$\int\int_A \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial A} f \nu_1\, ds,$$

dove $n = 2$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è la normale esterna alla curva regolare ∂A.

Dim.

Supponiamo che valgano la 3) e la 4) del Teorema 1.14 con $x_i = y$. Quindi

$$I \cap A = \{(x,y) \in I \mid h(x) > y\},$$

$$I \cap \partial A = \{(x,y) \in I \mid h(x) = y\}.$$

Ricordiamo che, come osservato dopo il Teorema 1.14,

$$\nu(x) = (\nu_1, \nu_2) = \frac{(-h'(x), 1)}{\sqrt{h'(x)^2 + 1}}.$$

Ora $\mathrm{supp} f \subset I$, quindi

$$\int\int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = \int\int_{A \cap I} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{x_0-r}^{x_0+r} \left(\int_{y_0-r}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dy \right) dx = \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x,h(x)) - \underbrace{f(x, y_0 - r)}_{=0}\, dx$$

$$= \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x,h(x))\, dx = \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x,h(x)) \nu_2(x,h(x)) \sqrt{1 + h'(x)^2}\, dx.$$

D'altra parte, $\partial A \cap I$ è una curva regolare con parametrizzazione $\rho : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}^2$, $\rho(t) = (t, h(t))$. Quindi

$$\int_{\partial A} f\nu_2\, ds = \int_{\partial A \cap I} f \nu_2\, ds = \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(t,h(t))\, \nu_2(t,h(t))\, \|r'(t)\|\, dt$$

$$= \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(t,h(t))\, \nu_2(t,h(t))\, \sqrt{1 + h'(t)^2}\, dt,$$

e la prima uguaglianza è dimostrata.

Per la seconda, ricordando la formula di derivazione di un integrale i cui estremi dipendano dalla variabile x,

$$\int\int_A \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ dx\ dy = \int\int_{A\cap I} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ dx\ dy = \int_{x_0-r}^{x_0+r} \left(\int_{y_0-r}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ dy \right)\ dx$$

$$= \int_{x_0-r}^{x_0+r} \left(\frac{d}{dx} \int_{y_0-r}^{h(x)} f(x,h(x))\ dy \right) - f(x,h(x))\, h'(x)\ dx$$

$$= \int_{y_0-r}^{h(x_0+r)} \underbrace{f(x_0+r,y)}_{=0}\ dy \quad - \int_{y_0-r}^{h(x_0-r)} \underbrace{f(x_0-r,y)}_{=0}\ dy \quad - \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x,h(x))\, h'(x)\, dx$$

$$= -\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x,h(x))\, h'(x)\, dx = \int_{\partial A} f\nu_1\ ds.$$

Allo stesso modo si procede negli altri casi. $\square$

Per completare la dimostrazione del Teorema della divergenza, abbiamo bisogno dello strumento della partizione dell'unità . Enunciamo, senza dimostrazione, la seguente proposizione

Proposizione 1.22 *Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato. Siano $Q_1, \ldots, Q_N$, N quadrati che ricoprono $\overline{A}$,*

$$\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{N} Q_i = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i(P_i, r_i).$$

Allora esistono N funzioni $\psi_1, \ldots, \psi_N \in C^1(\mathbb{R}^2)$, tali che

1. $\operatorname{supp} \psi_i \subset Q_i(P_i, r_i)$;
2. $\sum_{i=1}^{N} \psi_i(x,y) = 1 \quad$ per ogni $\quad (x,y) \in \overline{A}$;
3. $0 \leq \psi(x,y) \leq 1$.

Passiamo, ora, alla dimostrazione del Teorema della divergenza nel caso $n = 2$.

Dim.

Sia A un aperto regolare di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Sia $B \subset \mathbb{R}^2$, $\overline{A} \subset B$, ed $f : B \to \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(B)$, $f = (f_1, f_2)$, un campo vettoriale. Per ogni punto $P \in \overline{A} = A \cup \partial A$, assegnamo un quadrato di centro P e raggio r, $Q(P, r)$ nel modo seguente:

1. Se $P \in A$, prendiamo r piccolo in modo che $\overline{Q(P, 2r)} \subset A$.

2. Se $P \in \partial A$, prendiamo r in modo che $\partial A \cap Q(P, 2r)$ sia il grafico di una funzione $y = h(x)$ (oppure $x = h(y)$), e $Q(P, 2r) \subset B$.

Allora l'insieme compatto $\overline{A}$ è tale che

$$\overline{A} \subset \bigcup_{P \in \overline{A}} Q(P, r),$$

quindi esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{N} Q_i(P_i, r_i).$$

Consideriamo la partizione dell'unità $\psi_1, \dots, \psi_N$ relativa a questi quadrati. Ragioniamo su ogni componente di f separatamente, e per semplicità poniamo $f_2 = F$. Si ha, $\sum_{i=1}^{n} \psi_i F = F$ e

$$\begin{aligned} \int\int_A \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\, dx\, dy &= \int\int_A \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \psi_i F}{\partial y}(x, y)\, dx\, dy \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int\int_A \frac{\partial (\psi_i F)}{\partial y}(x, y)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Ora distinguiamo gli indici a seconda che $P_i \in A$ oppure $P_i \in \partial A$. Se $P_i \in A$, siccome $\operatorname{supp}(\psi_i F) \subset \operatorname{supp} \psi_i \subset Q(P, 2r_i)$, per il Lemma 1.20,

$$\begin{aligned} \int\int_A \frac{\partial (\psi_i F)}{\partial y}(x, y)\, dx\, dy &= \int\int_{Q(P, 2r_i)} \frac{\partial (\psi_i F)}{\partial y}(x, y)\, dx\, dy \\ &= 0 = \int_{\partial A} \psi_i F\, \nu_2\, ds. \end{aligned}$$

Se invece $P_i \in \partial A$,per il Lemma 1.20,

$$\int\int_A \frac{\partial(\psi_i F)}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial A} \psi_i F\, \nu_2\, ds.$$

Sommando rispetto ad i,

$$\int\int_A \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial A} \psi_i F\, \nu_2\, ds = \int_{\partial A} F\, \nu_2\, ds,$$

che è quanto volevamo dimostrare.
Analogamente si prova l'analoga uguaglianza per f_1. In definitiva,

$$\begin{aligned} \int\int_A \mathrm{div} f\, dx\, dy &= \int\int_A \frac{\partial(f_1)}{\partial x} + \frac{\partial(f_2)}{\partial y}\, dx\, dy \\ &= \int_{\partial A} f_1\, \nu_1\, ds + \int_{\partial A} f_2\, \nu_2\, ds = \int_{\partial A} f \cdot \nu\, ds. \end{aligned}$$

□

Concludiamo con il significato fisico della divergenza di un campo vettoriale f piano (cioè in $\mathbb{R}^2$).

Consideriamo un disco D di raggio r e centro $P \in \mathbb{R}^2$ (frontiera orientata positivamente). Sia $C = \partial D$. Dall'uguaglianza

$$\int\int_D \mathrm{div} f\, dx\, dy = \int_C f \cdot \nu\, ds,$$

dividendo per Area$D = \pi r^2$ e passando al limite per $r \to 0$, otteniamo

$$\mathrm{div} f(P) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int\int_D \mathrm{div} f\, dx\, dy = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_C f \cdot \nu\, ds.$$

Supponiamo che f rappresenti un campo di velocità del moto piano di un fluido incompressibile a densità costante (p.e. acqua). In ogni (x,y), $f(x,y)$ assegna la velocità della particella di un fluido che si trova nel punto di coordinate (x,y). Allora $\int_C f \cdot \nu\, ds$ rappresenta la differenza tra la quantità di fluido in uscita ed entrata in D nell'unità di tempo (flusso di fluido attraverso la frontiera). In definitiva la div$f(P)$ è la densità superficiale di flusso uscente, una misura di quanto entra o esce f per unità di area e per unià di tempo.

1.5 Il Teorema di Stokes

Una superficie regolare si comporta localmente come un aperto di $\mathbb{R}^2$. In questo paragrafo ci occuperemo di superfici che si comportano come aperti regolari di $\mathbb{R}^2$.

Esempio 1.23 1. Paraboloide infinito di parametrizzazione $r : (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$, $r(\theta, \rho) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, \rho^2)$, è una superficie che non si comporta come un aperto regolare.

2. L'emisfero superiore di parametrizzazione $r : (0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$, $r(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$, è una superficie che si comporta come un aperto regolare di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 1.24 *Si definisce bordo di una superficie* Σ *l'insieme*

$$\partial\Sigma = \overline{\Sigma} \setminus \Sigma.$$

Si noti l'abuso di notazione, con lo stesso simbolo si denota anche la frontiera dell'insieme.

Calcoliamo il bordo delle superfici dell'esempio precedente. Per il paraboloide si ha $\partial\Sigma = \Sigma \setminus \Sigma = \emptyset$, mentre per l'emisfero $\partial\Sigma =$circonferenza nel piano xy di centro $(0, 0)$ e raggio 1.

Si noti che il concetto di bordo di una superficie non dipende dalla parametrizzazione.

Sia ora Σ una superficie regolare, semplice, orientabile e con bordo $\partial\Sigma$ costituito da una curva chiusa regolare a tratti. Andiamo a definire un orientamento positivo per $\partial\Sigma$ rispetto all'orientamento di Σ.

Consideriamo il versore normale n di Σ (ricordo che per (r, Σ) si ha $n = \dfrac{r_u \wedge r_v}{\|r_u \wedge r_v\|}$). Scegliamo n (oppure $-n$) per determinare l'orientazione positiva di Σ e chiamiamo questo "lato" di Σ come lato positivo, e l'altro come lato negativo.

Diremo che $\partial\Sigma$ è orientato positivamente rispetto a Σ se, percorrendo $\partial\Sigma$ mantenendosi sul lato positivo di Σ, si lasciano i punti di Σ a sinistra. In tal caso si scrive $\partial^+\Sigma$. Questa definizione si può formalizzare in modo preciso ma, per semplicità, preferiamo fornire una definizione più intuitiva. Definiamo la classe delle superfici a cui siamo interessati.

Definizione 1.25 *Sia $A \subset \mathbb{R}^2$, un aperto regolare di classe C^1. Sia $T \subset \mathbb{R}^2$, un compatto, chiusura di un aperto connesso e $\phi : T \to \mathbb{R}^3$ una superficie Σ regolare, semplice, di classe C^2. Supponiamo che $\overline{A} \subset \overset{\circ}{T}$ e sia $\mathcal{S} = \phi(A) \subset \Sigma$. In tal caso diremo che $\mathcal{S}$ è una superficie ammissibile.*

Si osservi che, per la biiettività di $\phi_{|A}$, si ottiene

$$\begin{aligned}\partial\mathcal{S} &= \overline{\mathcal{S}} \setminus \mathcal{S} = \overline{\phi(A)} \setminus \phi(A) = \phi(\overline{A}) \setminus \phi(A) = \phi(\overline{A}) \cap C(\phi(A)) \\ &= \phi(\overline{A}) \cap \phi(C(A)) = \phi(\overline{A} \cap C(A)) = \phi(\overline{A} \cap \overline{C(A)}) = \phi(\partial A),\end{aligned}$$

dove con ∂A si è denotata la frontiera di A. Se γ è una parametrizzazione di $\partial^+ A$, allora $\phi \circ \gamma$ è una parametrizzazione di $\partial^+\mathcal{S}$ con l'orientazione proveniente dalla scelta di $n = \dfrac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|}$.

Siamo in grado di enunciare il Teorema di Stokes (senza dimostrazione).

Teorema 1.26 *(Teorema di Stokes) Sia $\mathcal{S}$ una superficie ammissibile. Sia $f = (f_1, f_2, f_3)$ un campo vettoriale definito in un aperto contenente $\mathcal{S}$, $f \in \mathcal{C}^1$. Allora*

$$\int_{\mathcal{S}} \mathrm{rot} f \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial^+\mathcal{S}} f \cdot \tau \, ds = \int_{\partial^+\mathcal{S}} \omega,$$

dove

$$\mathrm{rot} f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \Big(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big),$$

τ è il versore tangente a $\partial^+\mathcal{S}$, e la forma differenziale ω è $\omega(x,y,z) = f_1(x,y,z)\,dx + f_2(x,y,z)\,dy + f_3(x,y,z)\,dz$.

Esempio 1.27 Calcolare l'integrale della forma differenziale $\omega(x,y,z) = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, lungo la curva γ ottenuta come intersezione della sfera di equazione $x^2+y^2+z^2 = a^2$ con il piano di equazione $x+y+z=0$, percorsa in senso antiorario.

Si noti che γ è una circonferenza di centro l'origine, bordo di un disco $\mathcal{S}$ ottenuto, localmente, come insieme degli zeri della funzione $g(x,y,z) = x+y+z$. Prendiamo $f(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y)$ e calcoliamo sia la normale a $\mathcal{S}$ che rot$f$. Considerata la parametrizzazione di $\mathcal{S}$ definita da $r(x,y) = (x,y,-x-y)$, si ha $r_x(x,y) = (1,0,-1)$, $r_y(x,y) = (0,1,-1)$ e $r_u \wedge r_v = (1,1,1)$ da cui $n = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Infine

$$\mathrm{rot}f(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1, 1-1, 1-1) = (0,0,0).$$

Allora, per il Teorema di Stokes

$$\int_{\gamma^+} \omega = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}f \cdot n \, d\sigma = \int_{\mathcal{S}} (0,0,0) \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \, d\sigma = 0.$$